



同濟大學

TONGJI UNIVERSITY

博士学位论文

# 大跨度屋盖几何非线性和 脉动风等效静力风荷载

科技部国家重点实验室基础研究资助项目(SLDRCE08-A-03)  
科技部国家重点实验室基金资助(SLDRCE10-B-04)。

姓 名：孙五一

学 号：0510020156

所在院系：土木工程学院

学科门类：工学

学科专业：风工程

指导教师：顾明 教授

副指导教师：周昶毅 副教授

二〇一一年十一月



同濟大學  
TONGJI UNIVERSITY

A dissertation submitted to

Tongji University in conformity with the requirements for

the degree of Doctor of Philosophy

## **Geometrical nonlinear and equivalent static wind loads of fluctuating wind on large-span roofs**

Supported by:

National Key Laboratory Fundamental Research Program from Ministry of Science and Technology of China(SLDRCE08-A-03)

National Key Laboratory Fund from Ministry of Science and Technology of China(SLDRCE10-B-04)

Candidate: Sun Wuyi

Student Number: 0510020156

School/Department: School of Civil Engineering

Discipline: Engineering

Major: Wind Engineering

Supervisor: Professor. Gu Ming

Associate supervisor: Associate professor. Zhou Xuanyi

November, 2011

大跨度屋盖几何非线性 and 脉动风等效静力风荷载

孙五一

同济大学

## 学位论文版权使用授权书

本人完全了解同济大学关于收集、保存、使用学位论文的规定，同意如下各项内容：按照学校要求提交学位论文的印刷本和电子版；学校有权保存学位论文的印刷本和电子版，并采用影印、缩印、扫描、数字化或其它手段保存论文；学校有权提供目录检索以及提供本学位论文全文或者部分的阅览服务；学校有权按有关规定向国家有关部门或者机构送交论文的复印件和电子版；在不以赢利为目的的前提下，学校可以适当复制论文的部分或全部内容用于学术活动。

学位论文作者签名：

年 月 日

## 同济大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下，进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人创作的、已公开发表或者没有公开发表的作品的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本学位论文原创性声明的法律责任由本人承担。

学位论文作者签名：

年 月 日



## 摘要

随着科学技术的迅速发展和人民生活水平的不断改善,各种形式的大跨度屋盖在社会经济和文化交流中发挥着越来越重要的作用,大跨度屋盖是近几十年来发展最快的结构形式之一。

相比传统刚性结构,大跨度屋盖结构通常具有质量轻、柔性大、阻尼小等特点,对于风的作用比较敏感,风荷载是这类结构设计的控制荷载。因此为了给大跨度屋盖的抗风设计提供科学的依据,研究这类结构的风荷载特性、风致响应和等效静力风荷载便显得非常必要。

本文主要就以下几个方面进行研究:

- 1、大跨度屋盖结构表面风场的本征正交分解(POD)法的研究,为脉动风静力等效风荷载的研究奠定基础。首先对 POD 理论中的协方差本征变换(CPT)理论在整体风场(平均风荷载和脉动风荷载之和)和脉动风场(仅含脉动风荷载)两种不同风场中的差异进行介绍;然后基于某一大跨度屋盖的刚性模型风洞试验,对 CPT 理论在两种风场中的具体运用进行了详细的阐述,对大跨度屋盖的风荷载特性进行了分析。
- 2、大跨度屋盖几何非线性问题的研究。以一种常见的大跨屋盖型式——预应力索网屋盖为例,对结构找形和风致响应计算进行了研究。首先简要地回顾了经典的有限元理论,并有针对性地推导了直线预应力索结构的有限元理论,尤其是对单元预应力刚度矩阵进行了详细推导。其次采用静力非线性理论对结构进行了找形。最后着重研究了一些参数的变化对结构动力特性和风致响应的影响,对比分析了三种不同的风致响应计算方案。
- 3、大跨度屋盖脉动风等效静力风荷载(ESWL)的研究。基于脉动风致响应,采用惯性力组合法和仅与风场 CPT 模态有关的方法对大跨屋盖结构的脉动风 ESWL 进行了研究。基于最小二乘优化计算理论,提出了一种适用于求解复杂线性大跨度屋盖脉动风 ESWL 的新方法——POD 模态补偿方法,其计算结果及其计算精度和考虑所有阶数结构模态的惯性力组合方法完全一致,解决了既有方法误差较大、因而不能较好反映真实风荷载的特点,同时该方法具有一定的适用性。

**关键词:** 大跨度屋盖结构, 本征正交分解法, 几何非线性, 预应力悬索屋盖, 找形, 风致响应, 等效静力风荷载

## ABSTRACT

With the rapid development of science and technology, along with the continual improvement of people's living standards, a variety of large-span roofs have been playing ever-increasing significant roles in today's social economy and cultural exchange, it is one of structural forms which enjoys the most rapid development.

Compared with traditional rigid structures, the large-span roofs are characterized by their light weight, strong flexibility and small damping. They are sensitive to the wind loading which is the dominant loading in their designs. Accordingly, it is vital to study the wind loading characteristics, the wind-induced response and the equivalent static wind loading (ESWL), in order to provide a scientific basis for the wind-resistant designs of these structures.

The thesis mainly covers the following aspects:

1. The study on Proper Orthogonal Decomposition (POD) of wind pressure on the large-span roofs, a study that lays the ground for equivalent static wind loading (ESWL) of fluctuating wind. Firstly, the thesis points out the differences of Covariance Proper Transformation (CPT) theories between the global wind pressure field (which is the sum of mean wind and fluctuating wind) and the fluctuating wind pressure field (which only contains the fluctuating wind). On the basis of the pressure measurements of wind tunnel test on a rigid model of a practical large-span roof, the specific applications of CPT theories in the former two kinds of wind fields are illustrated in details, an effort to make an analysis of its wind characteristics.
2. The study about geometrical nonlinearity (GNL) of the large-span roofs. The study about geometrical nonlinearity (GNL) of the large-span roofs. The thesis takes, for example, the pre-tensioned suspended-cable roof which is a common kind of large-span roof, and conducts some researches about form-finding and wind-induced responses of the structure. Firstly, the thesis reviews the classic finite element method (FEM) in brief and aims at deducing the FEM theories of the beeline pre-tensioned suspended-cable structure, especially the element pre-tensioned stiffness matrix. Secondly the thesis makes a form-finding of the structure according to static GNL. Finally, the thesis emphasizes on the influences of structural dynamic characteristics



and wind-induced responses, which are generated by some variety in parameters, and analyses contrastively three different wind-induced response computational schemes.

3. The study about ESWL of fluctuating wind on the large-span roofs. Based on the fluctuating wind-induced response, the thesis employs the method of inertial force combination (MIFC) and the method concerned only CPT modes of wind field to study the ESWL of fluctuating wind on the large-span roofs. Based on the optimization theories of Least Square (LS), the thesis advances a new method—CPT mode compensation method that can be employed to solve the ESWL of fluctuating wind on those complex and linear large-span roofs, and its results and computational precision are completely consistent with the method of MIFC considering all modes, so the new method not only settles problems which have biggish error and can't reflect real wind loading in the existing methods but also have certain applicability.

**Key Words:** large-span roofs, proper orthogonal decomposition(POD), geometrical nonlinearity(GNL), pre-tensioned suspended-cable roof, form-finding, wind-induced response, equivalent static wind loading(ESWL)

## 目录

|  |    |
|--|----|
| 第 1 章 绪论.....                                | 1  |
| 1.1 引言.....                                  | 1  |
| 1.2 大跨度屋盖风致响应研究的概述.....                      | 1  |
| 1.2.1 频域法.....                               | 1  |
| 1.2.2 时域法.....                               | 8  |
| 1.3 大跨度屋盖等效静力风荷载研究的概述.....                   | 12 |
| 1.3.1 阵风荷载因子(Gust Loading Factor, GLF)法..... | 13 |
| 1.3.2 基于荷载响应相关系数法(LRC 法)的 ESWL 研究.....       | 16 |
| 1.3.3 一致静力等效风荷载.....                         | 19 |
| 1.4 目前大跨度屋盖研究存在的主要问题和不足.....                 | 20 |
| 1.5 本文的研究目的和主要内容.....                        | 21 |
| 第 2 章 风场中的本征正交分解法.....                       | 23 |
| 2.1 引言.....                                  | 23 |
| 2.2 POD 基本原理.....                            | 23 |
| 2.2.1 POD 简介.....                            | 23 |
| 2.2.2 POD 基本原理的数值计算过程及特性.....                | 25 |
| 2.3 本征正交分解法的工程应用.....                        | 33 |
| 2.3.1 工程概况及结构概况.....                         | 33 |
| 2.3.2 风洞试验.....                              | 33 |
| 2.3.3 本征正交分解法的应用.....                        | 34 |
| 2.4 本章小结.....                                | 45 |
| 第 3 章 大跨度屋盖几何非线性问题的基础理论.....                 | 47 |
| 3.1 引言.....                                  | 47 |
| 3.2 几何非线性有限元理论的简介.....                       | 48 |
| 3.2.1 静力学中几何非线性问题的表达格式及其求解.....              | 48 |
| 3.2.2 动力学中几何线性与几何非线性问题的表达格式及其求解.....         | 59 |
| 3.3 具有几何非线性特征的大跨屋盖的几何非线性有限元理论.....           | 66 |
| 3.3.1 基本假定.....                              | 66 |
| 3.3.2 几何非线性问题中相关参数.....                      | 67 |
| 3.3.3 具有几何非线性特征的大跨屋盖找形分析中的有关理论.....          | 78 |
| 3.4 本章小结.....                                | 81 |
| 第 4 章 大跨度屋盖几何非线性问题的应用研究.....                 | 82 |
| 4.1 引言.....                                  | 82 |
| 4.2 具有几何非线性特征的大跨屋盖的找形分析.....                 | 82 |
| 4.2.1 结构概况.....                              | 82 |
| 4.2.2 初始猜测位形和找形后位形.....                      | 83 |

|                                     |     |
|-------------------------------------|-----|
| 4.2.3 结构找形分析.....                   | 85  |
| 4.3 具有几何非线性特征的大跨屋盖的风致响应计算.....      | 89  |
| 4.3.1 结构概况和风洞试验概况.....              | 89  |
| 4.3.2 风致响应计算时的一些注意事项.....           | 91  |
| 4.3.3 风致响应计算.....                   | 93  |
| 4.4 本章小结.....                       | 201 |
| 第5章 大跨度屋盖脉动风等效静力风荷载的研究.....         | 202 |
| 5.1 引言.....                         | 202 |
| 5.2 初始等效目标响应的确定.....                | 203 |
| 5.3 惯性力组合法.....                     | 203 |
| 5.3.1 基于等效目标响应为节点位移的惯性力组合法.....     | 204 |
| 5.3.2 基于等效目标响应为其它响应的惯性力组合法.....     | 205 |
| 5.3.3 惯性力组合法计算中相关的数值解法.....         | 206 |
| 5.3.4 算例验证与分析.....                  | 208 |
| 5.4 与结构模态无关而仅与风场CPT模态有关的ESWL研究..... | 227 |
| 5.4.1 新的脉动风ESWL计算方法.....            | 227 |
| 5.4.2 算例验证与分析.....                  | 228 |
| 5.5 本章小结.....                       | 237 |
| 第6章 总结与展望.....                      | 238 |
| 6.1 本文工作总结.....                     | 238 |
| 6.1.1 本征正交分解法在风荷载特性分析上的应用.....      | 238 |
| 6.1.2 大跨度屋盖几何非线性问题的研究.....          | 238 |
| 6.1.3 大跨度屋盖脉动风等效静力风荷载的研究.....       | 239 |
| 6.2 研究工作展望.....                     | 240 |
| 致谢.....                             | 241 |
| 参考文献.....                           | 243 |
| 个人简历、在读期间发表的学术论文与研究成果.....          | 253 |



# 第 1 章 绪论

## 1.1 引言

随着科学技术的迅速发展和人民生活水平的不断提高,各种形式的大跨度屋盖在社会经济和文化的交流中正发挥着越来越重要的作用,可以说大跨度屋盖是最近 30 多年以来发展最快的结构形式之一。许多宏伟而富有特色的大跨度屋盖不仅成为当地的象征性标志和著名的人文景观,而且作为其核心的空间结构技术的发展状况已成为代表一个国家建筑科技水平的重要标志之一[1]。

大跨度屋盖通常具有质量轻、柔性大、阻尼小和自振频率低等特点,风荷载往往是这类结构设计中的主要控制荷载[2; 3; 4; 5; 6]。因而对大跨度屋盖可能遭遇到的风荷载情况,以及由此产生的结构动力性能和动力响应做出正确的估算并采取有效的预防措施,一直是大跨度屋盖设计中的重要环节。30 多年以来,国际上对高层、高耸结构以及大跨桥梁结构的抗风研究取得了重要进展和成果。相比之下,大跨度屋盖的抗风研究进展却一直相对滞后,因而开展这些方面的研究尤其具有重要的现实意义。结合本文主要研究内容,笔者在此就大跨度屋盖已有的抗风理论体系中的风致响应计算方法和等效静力风荷载的发展做一简要的回顾,然后指出目前大跨度屋盖研究存在的主要问题和不足,最后引出本文的研究目的和主要内容。限于篇幅,本文在回顾中仅对一些有代表性的研究成果进行评述。

## 1.2 大跨度屋盖风致响应研究的概述

由于大跨度屋盖为风敏感结构,其设计过程中风致动力响应计算方法就显得非常重要。根据随机振动理论,结构在风荷载作用下的动力响应计算方法常常可以分为频域法和时域法。

### 1.2.1 频域法

频域分析方法的基本思想是通过振型分解将结构响应统计量描述成对应各阶振型的广义模态响应在模态空间内的线性组合,在频域内通过传递函数建立激励与响应之间的关系,描述结构的动力响应。该类方法计算效率较高、物理概念十分清晰,可以直接得到风振响应随风荷载特性和结构基本特性的变化规律,故在结构风工程的理论研究中应用较为广泛,该方法常常用于求解大跨度屋盖的风致响应。

#### 1.2.1.1 传统的频域计算方法

在大跨度屋盖的风致响应计算方法中, 模态叠加法概念清晰、计算简单而倍受欢迎, 它常常借助平方和开方(Square Root Sum of Square,SRSS)法或完全二次型组合(Complete Quadratic Combination,CQC)法来实现。本文称之为传统的频域计算方法。

## 1、SRSS 方法

文献[7; 8; 9]结合风洞试验, 对一些几何形状简单、响应较为单一(位移响应)的大跨度屋盖风致响应进行了研究。其中 Uematsu 等[7]对一个矩形、封闭式(即不用考虑内压)的大跨平屋盖的风致响应进行了研究。由于该结构刚度较大, 位移响应主要是以背景响应为主, 而且此时的位移响应与第一阶模态的形状相似, 因此作者[7]认为在湍流风荷载作用下结构响应由第一阶模态控制, 因而文中仅仅考虑了第一阶模态力的影响, 得出了第一阶模态位移的统计值。Christiano 等[8]认为在静力分析中需要考虑几何非线性, 在动力分析中(笔者注: 此处的动力分析指的是在脉动风荷载作用下的动力分析), 不需要考虑几何非线性, 因此在计算脉动风荷载作用下结构的响应时, 可以假设荷载——变形之间的关系是线性的。据此作者[8]对一圆形凹面索网屋盖进行了风致响应计算, 通过对其动力响应的分析表明在脉动风荷载作用下结构横向位移的均方根同静力值相比较小。由于结构形式简单, 作者[8]计算时只取了第 1、2 和 4 阶模态。Lou 等[9]基于准定常假定对一柔软弹性方形大跨平屋盖的风致抖振响应进行了研究。与文献[7; 8]相比, 文献[9]得出了更加详细的结论: 第 1 阶模态通常控制了位移响应, 高阶模态对抖振响应的影响随着屋盖上节点位置的变化而变化, 屋盖弹性弹性越大, 高阶模态的影响越显著。

文献[7; 8; 9]所研究的结构形式简单, 所研究的响应较为单一。通常大跨度屋盖结构形式复杂, 控制结构设计的响应也较多, 因而有必要对复杂大跨度屋盖的多个不同的风致响应进行研究。Nakamura 等[10]基于风洞试验对一体育场中位于下风侧的拱形悬挑屋盖的风致响应进行了分析。作者发现尽管平均风力较小, 但脉动风力较大, 因此估算屋盖的动力响应就显得非常重要。在谱模态分析中, 作者[10]建立起沿跨度方向的某阶模态的广义风力的功率谱, 其中第 1 阶模态的不同区域之间的无量纲的互谱采用了经验公式。结果表明, 计算不同的响应时, 需要考虑不同模态的影响。比如仅计算结构的位移响应时, 可只考虑前两阶模态, 当计算桁架单元的剪力时, 则需考虑更多阶的模态, 在单元的强度设计中, 习惯做法便是考虑前 6 阶模态的影响。

由以上分析可知, 文献[7; 8; 9; 10]所取的模态数总体偏少, 尽管结构的自由度可能较多。现代大跨度屋盖结构常常有很多复杂的振动模态, 此外不同模态对应的自振频率通常也非常接近[4; 8; 10], 因此不可能象高层建筑那样通常用少数

低阶模态尤其是第1阶模态来计算大跨度屋盖的风致响应[6]。文献[4]基于风洞试验所得风压数据的互谱密度,用 Monte Carlo 方法模拟了多点脉动风压时程,然后用基于本征值的模态时程响应方法对两种不同的、形状复杂的大跨度屋盖风致响应进行了分析,考虑了高达170阶模态,计算结果也表明不同的响应计算需要考虑不同模态数的影响。

文献[4]虽然强调指出了大跨度屋盖的风致响应计算需要考虑多阶甚至高阶模态的影响,但是如何选取模态,作者并没有指出一般性的原则,这或许成为复杂大跨度屋盖风致响应计算中一个关键因素,因为对于非常复杂的大跨度屋盖,结构参振模态的选取往往是非常重要的;此外仅仅选取小于结构自由度数的一定数量的参振模态进行结构风致响应计算,可能会造成一定误差,如何解决误差问题,文献[4]也没有阐述。

Nakayama 等[6]通过数值分析发现大跨度屋盖存在一些高阶模态对风振响应大,起着主导模态的作用,但由于其模态阶次高而往往被忽略。作者提出利用每阶模态的应变能对系统总应变能的贡献大小来确定参振模态,贡献越大,参与振动的可能性越大。关于如何确定参振模态数,作者指出所选择模态的应变能总和要充分接近系统总应变能,如果参振模态的能量远小于总应变能,说明忽略了一些重要的模态。文中进一步指出所选择的一系列模态叠加成的位移  $\bar{x}_{set}$  应当可以表示出平均风荷载作用下的位移  $\bar{X}_{ST}$ , 如果  $\bar{x}_{set}$ 、 $\bar{X}_{ST}$  或者二者对应的应变能非常接近,这就意味着所选择的模态是适当的,否则还有一个对风致响应占优势贡献的特殊模态(即 X 模态或准 X-模态)被忽略掉,此时可以根据位移差来构造 X-模态及其对应的较大值的频率, X-模态的意义要必须能表达位移的背景响应,它有一个典型的与所谓的基本模态形状相似的模态形状。作者[6]同时也对一个圆屋顶大跨度屋盖进行了风致响应分析,结果表明考虑 X-模态补偿后的频域分析方法的有效性。He[11]也根据模态对系统应变能的贡献来选取参振模态,然后根据背景响应建立起一种大跨度空间结构风致响应的模态补偿法,文中的补偿模态叫 C-模态,通过对一网壳结构算例的分析,验证了该文提出的方法是合理的。

虽然文献[6; 11]定性地指出确定参振模态的一般性原则,并且解决了遗漏主要参振模态(即 X-模态和 C-模态,或叫做补偿模态)后怎样克服风致响应计算带来的误差问题,但是文献[6; 11]也存在一些缺点:①补偿模态仅是根据应变能守恒构造的,实际上大跨度屋盖尤其是柔性大跨度屋盖存在一定的动能,忽略动能构造的补偿模态可能会造成一定的误差;②主导模态的选择是根据能量占优的原则确定的,如果把模态当作基(即坐标系),模态位移叠加法中的广义坐标即为所研究的位移在基上的投影(即坐标),选择能量占优的模态实际上是选择投影值(绝对值)较大的模态,可以说这样选择的模态仅从数学含义的角度出发的,没有真

正从结构本身和外部风荷载来加以考虑,因为参振模态实际上还与风荷载的分布形式及其荷载中心频率有关的[12; 13; 14]; ③主导模态的选择仅仅是根据位移来确定的,根据位移选择的主导模态和构造出的补偿模态能否适用于其它响应的计算值得进一步思考,因为由文献[4; 10]可知大跨度屋盖存在多个响应,不同响应考虑的模态也不一样; ④文献[11]是根据位移的背景响应来构造补偿模态,而文献[6]是根据平均风荷载作用下的位移来构造的,虽然文献[6]提到了位移响应的背景分量和共振分量,所以二者实际上都没有真实考虑到位移响应的构成,这对刚性大跨度屋盖是可行的,而对柔性大跨屋来说是存在一定问题的; ⑤两篇文献对各阶模态的贡献并没有给出定量描述,因此引入补偿模态时应考虑前多少阶模态仍存在随意性。

## 2、CQC 方法

模态叠加法中的 SRSS 法在计算大跨度屋盖的风致响应时,不能考虑模态之间的耦合问题,而大跨度屋盖不同模态间的耦合影响比较显著[14; 15]。因此文献[16]认为应基于 CQC 法计算大跨度屋盖的风致响应,忽略模态间的耦合效应的 SRSS 法是不正确的。

作者[16]从线性结构随机振动理论的基本方程出发,针对平稳随机激励的一般情形,推导出基于 CQC 方法的适合于大跨度屋盖结构随机风振响应根方差精细算式,式中考虑了不同振型之间互相关(即耦合)的影响。作者[16]同时指出,如按给出的算式进行大跨度屋盖结构随机振动响应根方差的精细计算,就必须首先获得结构各点风荷载之间互谱密度函数的实部和虚部,作者就风荷载互谱密度函数进行了讨论分析。

文献[16]虽然用 CQC 法对模态耦合的问题进行了一定程度的探讨,但是依然存在一些问题:由于对同时考虑实部和虚部的风荷载互谱的研究尚未取得可应用的成果,所以该方法的优越性还有待检验;此外同样对于非常复杂的大跨度屋盖,CQC 方法计算量会很大,计算风致响应的效率会较低。

### 1.2.1.2 改进的频域计算方法

由以上分析可知,传统的频域计算方法在计算大跨度屋盖尤其是复杂的大跨度屋盖存在着较大的缺陷,因此基于模态叠加法等一些常规的、传统的方法不适用于分析大跨度屋盖的风致响应[14],有必要对传统的频域计算作一些改进,寻求一些更加精确、高效的频域计算方法,本文称之为改进的频域计算方法。

## 1、修正的 SRSS 方法

在本文中,修正的 SRSS 方法是指在风致响应计算时,对传统的 SRSS 方法



进行修正以便考虑结构模态耦合的方法。

同样针对前述文献不能考虑模态之间的耦合问题，Gu 等[15; 17]认为大跨度屋盖与高层建筑不同的是它有集中模态，因此在动力响应计算中应当考虑多模态响应及其它们的耦合影响。具体来说，作者建议背景响应可以采用荷载响应相关系数法来计算，该方法实际上采用的是准静力方法，因此包含了构成背景分量的所有模态的贡献。而作者用模态耦合因子来描述多模态共振响应之间的耦合影响，相应地用修正的 SRSS 法来计算具有集中模态和低阻尼的大跨度弹性屋盖结构的动力共振响应：模态耦合因子能够定量描述对于共振响应的模态耦合的贡献，修正的 SRSS 法能够大大简化结构的具有多模态耦合影响的共振响应的计算。最后作者用一个特殊的、复杂的大跨度屋盖验证了模态耦合因子和修正的 SRSS 法的精确性，计算结果表明该结构不同模态之间的耦合影响很大，能够用模态耦合因子加以描述，此外用修正的 SRSS 法计算得到的共振位移和精确值吻合得很好。

文献[15; 17]中的方法虽然能较好地克服模态耦合问题，并且充分吸收了 SRSS 法的优点，但是该文献只是选取了部分低阶模态和而且仅计算了位移响应，由前文可知这样的考虑存在一定的问题；此外公式的推导过程非常复杂。

## 2、综合考虑结构动力特性和风荷载特性的方法

前文所叙述的方法在选择参振模态时都仅从结构的动力特性出发的，没有考虑外加荷载——风荷载特性的影响。事实上，计算结构的风致响应应综合考虑结构动力特性和风荷载特性。

### 1) Ritz-POD 方法

Wu 等[14; 18]将大跨度屋盖的风致抖振响应分为平均响应、背景响应和共振响应。其中作者用本征正交分解(Proper Orthogonal Decomposition,POD)协方差方法计算背景响应，把背景响应表示成若干阶能量较大的风场本征模态(具体是协方差本征变换 Covariance Proper Transformation 模态，即 CPT 模态)作用效应的组合。而难点在于计算响应的共振分量，在计算该分量时，作者[14; 18]用频域中的 Ritz-POD 方法来计算，它综合运用了 POD 技术和 Ritz 向量直接叠加法二者的优点，通过 POD 分解，得到可以准确描述脉动风场的几个确定性的荷载空间分布形式，根据这些荷载空间分布形式，并考虑荷载中心频率的影响，自动选择对结构共振响应较大的 Ritz 向量，接着采用 Ritz 向量直接叠加法分析结构动力响应。

Ritz-POD 方法在计算脉动响应时用 Ritz 向量和 Ritz 值替代结构的固有振型和固有频率，与结构的固有振型和固有频率没有直接关系，在计算共振响应谱时，

频响函数函数不同于传统的随机响应分析,这大大简化了计算过程。该方法考虑了荷载空间分布形式,与不能考虑荷载空间分布形式的传统的振型叠加法相比,Ritz 向量叠加法具有更高的计算效率;此外该方法能计算多个控制响应。不过 Ritz-POD 方法也存在一定的缺点:POD 在选择风场的主导 CPT 模态时,虽然可以降阶截断部分 CPT 模态,但是所截断的 CPT 模态对结构响应贡献仍有可能较大,尤其是当建筑物表面脉动风压相关性较差时,前几阶 CPT 模态对风场的贡献往往不再占绝对主导地位,需要考虑更多阶 CPT 模态的贡献,根据这些 CPT 模态将生成较多的 Ritz 向量,势必影响 Ritz-POD 方法的计算效率。

## 2) 双模态变换理论

在综合考虑结构动力特性和风荷载特性计算结构的风致响应时,双模态变换理论又是一种代表性的方法。

双模态变换理论是一种综合运用结构经典模态分析和荷载 POD 理论的方法[12; 13; 19; 20; 21; 22]。通过双模态变换,动力响应表达成结构模态和荷载模态的双重集合。结构模态和荷载模态(CPT 模态、谱本征变换(Spectral Proper Transformation,SPT)模态)分别可以通过结构主坐标(Structural Principal Coordinates)和荷载主分量>Loading Principal Components)的权重加以表示。原则上每个结构主坐标被每个荷载主分量激起,实际上,因为模态截断,只有少数的结构主坐标和荷载主分量分别对动力响应和对荷载有贡献,而且结构模态和风场模态之间的正交关系将使动力响应通常能够仅用少数阶结构模态和荷载模态来加以表述[21]。如果将风振响应分为背景分量和共振分量,则分别可以利用 SPT 模态以及 CPT 模态对它们的计算进行简化。目前双模态变换理论已被用于求解高层建筑顺风向风致响应计算[13; 20; 21; 23]和大跨度桥梁的抖振响应计算[21]。唐意等[24]采用双模态变换理论对一大跨度屋盖的风致响应进行了一定的研究,证明了该方法的准确性。

双模态变换理论能根据结构风振响应的基本特点,将风振响应分为共振响应和背景响应,并分别利用 SPT 模态以及 CPT 模态对风振计算过程进行简化,从应用效果来看,该方法对风振响应起着一定的简化作用。但是与高层建筑不同,大跨度屋盖结构风荷载及结构形式复杂,风荷载本征模态与结构模态之间的正交性不明显,使双模态变换理论的有效性受到限制;在正交性不明显前提下,大跨度屋盖结构风振响应仍然需要考虑多阶模态,要得到比较准确的共振响应,则需要考虑足够多频率点位置的 SPT 模态,这是一项相当耗时的工作。正是由于这些缺点,到目前为止,双模态变换理论并没有广泛应用于大跨度屋盖尤其是复杂大跨度屋盖风致响应的计算中。

### 3) 虚拟激励法

虚拟激励法是近二十年发展起来的用于复杂结构随机振动计算分析的高效精确的计算方法[25]。具体来说,虚拟激励法的最大特点是将平稳随机振动分析转化为简谐振动分析,将非平稳随机振动分析转化为确定性时间历程分析,自动包含了所有参振模态的耦合项以及多点激励之间的非完全相关性,从而使计算量大大降低,而计算结果精度却和计算量大的、传统的CQC计算结果精度一致,所以虚拟激励法亦被称为快速CQC方法[26]。虚拟激励法最初用于计算地震响应[26; 27; 28],近年来又被广泛应用于风工程领域中,如高层建筑的风致响应[29]和大跨度桥梁的抖振分析[30; 31]。在大跨度屋盖的风致响应计算中,陈贤川[32]将模态加速度法和虚拟激励法联合运用对大跨度屋盖的风致响应计算进行了研究,结果发现,响应谱矩阵等于全部背景响应项加上前 $m$ 阶参振模态的共振响应项,以及背景响应和共振响应之间的耦合项,共振响应项中自动包含了各阶参振模态共振响应的耦合项。

虚拟激励法应用于大跨度屋盖的风致响应计算时,把随机风荷载激励转换成简谐激励,充分考虑了荷载的特性;而且该方法结合一定的模态叠加法,便能较好地解决大跨度屋盖的模态耦合问题。但是虚拟激励法的大部分计算量会耗费在对气动力谱矩阵的分解上,因而如果动力谱矩阵很大,虚拟激励法的计算也很慢;此外如何有效选择参振模态,值得进一步研究。

### 3、等效线性化方法

近年来,等效线性化方法在大跨度屋盖风致响应的计算中也得到了一定程度的应用。等效线性化方法又称统计线性化法,是工程中应用较广的预测非线性随机响应的近似解析法[33]。它的基本思想是将随机激励下的系统非线性振动微分方程用具有精确解的等效线性微分方程来近似,根据两方程之间的误差项在某种统计意义上最小的原理来确定等效线性微分方程中的参数[34]。在得到等效的线性系统后便可以用频域计算方法对结构进行响应分析。

张拉膜结构是一种典型的几何非线性系统,由于其所受非零均值风压以及很难给出结构非线性刚度项的显式表达式的特点,需要在基本的等效线性化理论基础上,构造适合于一般的张拉结构的等效线性化方法[33]。潘钧俊[33]基于零均值平稳随机激励的多自由度非线性系统的等效线性化方法中的谱矩阵法,构造了适合张拉膜结构几何非线性及其非零均值风压的等效线性化途径,然后对等效线性化系统的风致响应进行了分析,并与时域直接积分结果进行对比,验证了其适用性。

等效线性化方法能够把时域的非线性问题转化成频域的线性问题,利用已有的频域计算方法进行计算,可以有效地给出激励与响应关系,能够更直观的对非

线性系统的振动问题作定性和定量分析,从这个层面上来说,等效线性化方法是一种简化计算方法。但是在等效线性化方法提出过程中,都是应用不同的准则(能量误差控制、力误差控制)并通过位移变量来实现等效线性化,未见以应力为变量实现等效线性化的研究。以位移为变量实现的等效线性化给出的结果是结构位移均方根响应,而在位移和应力之间并不存在线性关系,所以不能在位移均方根和应力均方根之间建立简单的联系[33]。即使对于位移响应,作者[33]也发现不同地方也存在一定的差异,在整体上还是存在一定的误差。此外由文献[33]的推导过程可知,等效线性化方法比时域方法计算多出好几个中间计算环节,计算起来不太方便。

在本节结束处,需要指出的是频域法求解大跨屋屋盖风致响应时,必须以结构特征的线性化为前提,在计算过程中结构刚度、阻尼性质保持不变,不能考虑结构的非线性效应,因此仅限于线性结构或弱非线性结构的振动问题。无法有效地考虑几何非线性、材料非线性对结构风振特性的影响。因为非线性的存在,模态分析是不可行的且运动方程不得不采用逐步积分[35],频域中的模态叠加法通常用于线性结构,不能扩充到非线性问题[36]。尽管虚拟激励法和等效线性化方法能够求解非线性系统,但是由文献[25; 33]可知虚拟激励法和等效线性化方法是否适用于求解非线性系统,归根到底要依赖于等效线性化的使用范围,求解的精度几乎完全决定于等效线性化。

以上的频域计算方法或多或少存在一定问题,不能完全克服大跨度屋盖风致响应的频域计算方法中的缺陷,因而有必要寻求其它更加精确的方法。

## 1.2.2 时域法

随着结构形式的日益复杂化,其动力反应也变得复杂起来,为了确保结构的安全可靠,结构工程师需要了解更多准确而又复杂的结构动力反应信息,频域法由于自身缺陷很难适应这些需求。近几十年来,由于电子计算机编程技术和数值分析方法的发展,人们发现时域法能够克服频域法的缺陷,因而计算结构动力学中的时域法在结构的动力分析中占据着越来越重要的作用。

时域法是将荷载时程直接作用在结构上,通过时程逐步积分,迭代计算结构的动力响应时程。时域法也叫时程分析法,它经常结合有限元理论、数值迭代方法从而使得大跨度屋盖的线性和非线性风致响应的精确计算成为可能,因而深受人们欢迎。

### 1.2.2.1 随机振动离散分析方法

随着电子计算机技术的发展,连续系统的离散化分析方法在工程结构的力学性能分析中已经得到了广泛的应用。随机振动离散分析方法是离散化方法在随

机振动理论中的应用和发展,对该方法的研究是期望能利用离散化方法的灵活性和适用于规范计算的特点,找到一条实用性和通用性更强的随机振动分析的新途径[37; 38]。

为了使研究方法更具有普遍性,随机振动离散分析方法首先将体系的二阶运动微分方程  $mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = qE(t)S(t)$  (式中符号见本章下文)改写成更适合于理论分析和在计算机上构造数值算法的、矩阵形式的规则化一阶微分状态方程,该状态方程是关于系统的运动状态向量及其对时间的一阶导数和激励向量的线性组合,为不失一般性,非平稳随机过程的激励向量可以表示为确定性函数的对角阵和平稳随机过程向量的乘积,具体表达式如下[37; 38]:

$$Y'(t) = B^{-1}FY(t) + B^{-1}QE(t)S(t) \quad (1.1)$$

式中,

$$B = \begin{bmatrix} I & \\ & m \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -k & -c \end{bmatrix}, \quad Y(t) = \begin{bmatrix} [x(t)]^T & [x'(t)]^T \end{bmatrix}^T, \quad Q = [0 \quad q^T]^T$$

在上述参数中,  $Y(t)$  和  $Y'(t)$  分别表示状态向量及其一阶导数;  $I$ 、 $m$ 、 $c$ 、 $k$  分别表示单位矩阵、质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵;  $x(t)$ 、 $x'(t)$  和  $x''(t)$  分别为结构位移、速度和加速度向量;  $q$ 、 $E(t)$  和  $S(t)$  分别表示荷载作用位置向量、确定性函数的对角阵和平稳随机过程向量,当  $E(t)$  为常数矩阵时,激励向量  $E(t)S(t)$  即为平稳激励向量。

在阻尼条件和均方意义下,激励和可微的随机响应都是连续的,因而可以对  $Y(t)$  和  $E(t)S(t)$  在时域内分别离散成序列  $Y(n)$  和  $E(n)S(n)$  ( $n=1,2,\dots$ ),得到体系的含参数  $\beta$  的关于状态向量  $Y(n)$  的矩阵形式的差分基本递推式,即体系响应的递推方程式[37; 38]:

$$Y(n) = \left[ \left( 1 - \frac{1}{\beta} \right) I + \frac{1}{\beta} (1 - \beta \Delta t B^{-1} F)^{-1} \right] Y(n-1) + \Delta t (1 - \beta \Delta t B^{-1} F)^{-1} B^{-1} Q E(n + \beta - 1) S(n + \beta - 1) \quad (1.2)$$

递推式(1.2)与一般差分格式的区别是其激励采样点与响应采样点不在同一时刻,引入参数  $\beta$  的目的是可以通过对它的选择,使基本递推式具有良好的稳定性和精确性[37; 38]。在得到递推式(1.2)后便可以直接从结构的质量矩阵、阻尼矩阵、刚度矩阵和荷载的协方差矩阵出发,推导出任意随机激励作用下的结构响应均值和方差的递推式,可以迭代求解。

要使该方法成为求随机振动响应的理想方法,应首先考察基本递推式的数值计算稳定性和求随机振动响应的精确性。Tan 等[37]分析了基本递推式的稳定性和精确性:由于递推式的形式与荷载性质有关,因此其精确性将随着随机激励性质及  $\beta$  取值的不同而不同,当参数  $\beta = 0.5$  时,基本递推式此时便成了最优  $\beta$

递推式；因为最优  $\beta$  递推式在证明过程中未对时间步长作任何限制，因而具有数值计算的无条件稳定性，同时最优  $\beta$  递推式具有最好的精确性。

随机振动离散分析方法适合于自振频率密集且振型相互耦合的非线性结构体系。Tan 等[37; 38; 39]基于最优  $\beta$  递推式讨论了工程结构在任意激励作用下均值响应、白噪声激励和有色噪声激励作用下均方响应的离散分析方法及其实用递推式。作者[37; 38; 40]将该方法应用于悬索屋盖风振响应分析中，很好地解决了空间相关有色噪声激励作用下非线性体系的随机振动反应分析。随机振动离散分析方法由于整体考虑结构的振动特性，其计算精度相当于振型叠加法考虑结构所有振型参与组合；同时该方法计算公式简单，使用方便，结合了时域法和频域法的优点，是一种很有实用价值的求解动力响应的方法。但是随机振动离散分析方法仅适用于白噪声荷载，风荷载必须产生于空间相关的过滤白噪声[41]，当激励不是白噪声时，求解动力系统均方响应只能得到其近似值，就算  $\beta = 0.5$  时，其精度都不算是最好[38]；该方法是以定常线性动力系统为基础，因而其质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵均是定常的，事实上悬索屋盖具有较强的几何非线性，且在风荷载作用下容易发生流固耦合作用，此时上述矩阵尤其是刚度矩阵便不会是定常的，计算结果会带来较大的误差；对于线性模型，该方法是绝对收敛，对于非线性结构，位移的高阶项不能忽略，从该理论推出的均方公式是不封闭[41]。因而笔者认为随机振动离散分析方法是不能真正解决真实风荷载作用下大跨度屋盖的风致非线性响应。

### 1.2.2.2 经典的时程分析方法

在本文中，经典的时程分析方法是指不通过坐标变换，采用中心差分法、线性加速度法、Wilson- $\theta$  法、Newmark- $\beta$  法和 Houblt 法等经典的、离散的数值方法对结构的振动方程进行逐步积分，从而得到响应的时程。

#### 1、Newmark 方法

时程分析方法常常采用直接积分法(也叫逐步积分法)来计算响应时程[42; 43]。直接积分法的算法可归为显式法和隐式法，其中隐式积分适合于结构动力学问题，该方法应用于非线性问题不会遇到很大的困难[42]。在隐式积分法中，Newmark 法(即 Newmark- $\beta$  法)[44]由于具有较佳的稳定性和较低的周期延伸已经被广泛应用于工程结构的动力分析中，它是最为通用的一种方法[45]。

网壳是一种广泛用于中、大跨的空间结构体系，其风致响应的计算非常重要。Uematsu 等[46]对一大跨单层格构圆屋顶网壳结构的风振动力响应进行了研究，作者认为此类型圆屋顶的动力运动用线性系统(笔者注：从文中分析可知该结构比较刚性)来描绘，在时域内用 Newmark- $\beta$  数值积分方法求取  $\beta=1/4$  时结构位移

时程和单元轴弯合应力时程。作者[46]所研究的结构比较刚，作者仅对线性系统进行分析，对于单层网壳，这类结构具有一定的弹性，在某些情况下需要考虑风致大变形的影响并进行几何非线性动力分析[47; 48]。Li 等[47; 48]基于 Newmark- $\beta$  方法为单层网壳的非线性动力分析建立起离散时间点的增量形式的动力非线性等效静力平衡方程式，同时与静力分析中的非线性平衡方程进行比较，以此发现两个方程式之间的联系，然后用求解静力分析中的非线性平衡方程的弧长方法来求解动力非线性等效静力平衡方程式。该方法的难点在于如何确定每一个增长步里的初始荷载增长参数以及如何确定弧长增量的控制方程；此外该方法主要用于求解结构的非线性动力失稳问题。

张拉结构是大跨度屋盖中另外一种常见的结构形式，其风致响应的计算同样非常重要。该种类型结构的一个最为显著的特点是结构在外荷载作用下将具有大位移，其几何非线性特征非常明显[1; 32; 41; 45; 46]，但是应变通常保持在材料的线性应力应变关系的极限范围内[49]，即张拉结构的几何非线性属于大位移小应变问题。

Lazzari[35]运用 Aaike-Iwatani 自回归模型(笔者认为该模型是基于准定常理论)模拟了悬索结构的风荷载时程，然后用通过 Total Lagrangian(TL)公式发展起来的名为 Loki 的有限元准则来进行几何非线性分析：非线性方程的求解用 Newton-Raphson 方法来完成，而时域内的动力分析建立在 Newmark 运算法则基础之上的。最后作者[35]对双曲抛物面索网屋盖在风荷载作用下的几何非线性性能用 Loki 法则进行了研究，并且指出，该时域计算方法对复杂非线性结构的工程计算非常适合，并且能够提供获取结构和气动起源的非线性影响的有利条件。

通常结构的动力非线性分析是用增量矩阵修正(incremental matrix updates)和时域内直接积分(direct integration in time)去计算响应，在时域方法中，要采用迭代法建立起在每一步时间增量结束时力的平衡，而且要运用代数外推法求运动学参数[50]。Oskoei 等[50]用时域方法进行非线性索网的动力分析时，首先用矩阵修正法(matrix update methods)或拟牛顿法(quasi-Newton methods)对非线性系统展开迭代；在考虑动力时，Newmark- $\beta$  方法用于增量平衡方程式的直接积分；此外作者还对不同阻尼计算模型对结构响应的灵敏度也进行了研究。

根据经典非线性有限元理论，Tabarrok 等[49; 51]首先建立了张拉结构中单元的应变和位移之间的非线性关系，同时基于大位移小应变假设建立起线弹性本构关系，然后通过 Hamilton 原理或虚功原理得到了单元的平衡方程，最后集成整个系统的平衡方程，其中如果用 Newton-Raphson 方法对系统的平衡方程线性化即对位移求导后便可得到整个系统的几何非线性刚度矩阵。在明确了风荷载时程后，作者[49; 51]就用基于 Newmark- $\beta$  方法编制的非线性分析程序进行张拉结构

的风致响应分析, 在每一次 Newton-Raphson 叠代中, 风荷载都需要基于结构当前几何形状和压力系数而计算。文献[49]列出了部分节点的位移时程和部分时间点整个结构的位移等高线, 文献[51]也列出了一定风向角下最大应力的等高线。

## 2、最小化系统总势能列平衡方程的方法

和其它屋盖相比, 悬索屋盖柔性较大、弹性较高, 需要考虑风致响应[36]。在风荷载作用下, 文献[36; 52]建立起线性结构和非线性结构动力分析的统一方法, 以使用时域中的逐步积分来计算结构响应。与前文建立平衡方程不同的是, 文献[36; 52]在每一个时间增长步 $\Delta t$ 终点的动力平衡条件是通过最小化结构系统总势能得到的, 也即是当总势能最小时, 系统便达到平衡位置, 据此可以建立起迭代时的平衡方程。具体来说, 在每一个时间步的终点的动力平衡条件就是总势能对位移增量的偏导数即梯度向量为 0, 求出该位移增量后便进一步可以求出下一个迭代步的位移增量。文献[36; 52]中在建立运动方程时分别考虑了气动质量和气动阻尼对结构质量和结构阻尼的影响, 并且给出了总势能和梯度向量的经验公式。由文献[36; 52]的推导过程可知, 该方法比较复杂, 影响到它的推广和普及。

由上述时域方法可知, 基于经典有限元理论和离散数值积分的时域计算方法在大跨度屋盖的风致响应计算中起着非常重要的作用, 笔者认为该类方法在未来更加复杂的大跨度屋盖的动力响应计算中扮演着其它方法不可替代的角色。

### 1.3 大跨度屋盖等效静力风荷载研究的概述

文献[53]中谈到的简谐荷载作用下结构响应的动力放大系数实质上便可以搭建起动静荷载结合的桥梁。该思想具体到结构抗风领域, 便是本文将要研究的大跨度屋盖的等效静力风荷载(Equivalent static wind loading, ESWL)。

在结构工程中, 风荷载被定义为一种确定性的活荷载, 以静力荷载的形式出现, 然后与自重、雪荷载、地震作用等其它荷载(或作用)进行荷载(效应)组合形成结构的设计荷载。而实际上风荷载为一种随机性的动力荷载。为便于工程应用, 需要通过 ESWL 形式将风工程中的风荷载转换为结构工程中的风荷载, 因此 ESWL 是联系风工程和结构工程的纽带, 是结构抗风设计理论的核心问题, 近年来一直是结构风工程师研究的热点之一, 为工程设计者提供了处理复杂动力风荷载的有效手段, 避免了繁琐的随机振动分析, 具有重要的实用价值[54; 55; 56]。

所谓 ESWL, 就是当这个等效风荷载作为静力荷载作用于结构上时, 它引起的结构某一响应与实际风荷载作用时该响应的最大值一致, 正如 Holmes[2]指



出: ESWL 分布是指能产生峰值荷载效应的正确的预期值的那些荷载。ESWL 应确保从静力分析所得结果与实际风致响应的一致性[56]。在本小节中将仅介绍用于求解大跨度屋盖结构 ESWL 的常用方法。

### 1.3.1 阵风荷载因子(Gust Loading Factor, GLF)法

ESWL理论研究始于高层建筑结构, Davenport[57]借助阵风荷载因子法将用于结构设计的ESWL表示为作用在高层建筑上的平均风荷载乘以GLF而得到的, 以此来简单估算顺风向结构动力荷载[2], 从而开创了ESWL理论研究的先河, 文献[56; 58; 59]称该方法为传统的GLF法; 同样的GLF概念也已经被采纳用于横风向响应和扭转响应的ESWL计算中[59; 60]。GLF考虑了脉动风的动态以及由结构动态引起的任何的荷载放大, 因为形式简单, 该方法得到全世界广泛承认并且几乎被所有的大国用于制定风荷载规范和标准, 如美国规范、加拿大规范、澳大利亚规范、欧洲规范和日本规范等[56; 59], 我国荷载规范[61; 62]中的惯性风荷载法便是根据GLF法的原理发展起来的, 只不过规范中将GLF (规范中称为风振系数)定义为风振惯性力与平均风荷载的比值, 反映了结构本身动、静力特性对风振响应的影响, 赋予了ESWL明确的物理含义。

在文献[57]中, GLF的原始定义为整体风荷载(即最大风荷载)与平均风荷载的比值, 不过作者同时又认为GLF为某一时段内平均最大响应和平均风引起的平均响应之比。因而在分析ESWL时, 严格来说有GLF和阵风响应因子(Gust Response Factor, GRF), 不过这些术语包括阵风因子(Gust Factor, GF)在本质上有着同样的含义[2]。对于线弹性结构, GLF和GRF是相等的[57; 63; 64; 65], 在本文中不加区别地以GLF法称呼。此外GLF有时也叫荷载风振系数, GRF有时也叫响应风振系数。

由于利用GLF法来表示静力等效风荷载简单方便, 因而在大跨度屋盖结构抗风研究中也得到了一定的应用。

封闭平坦的大跨度屋盖是大跨度屋盖中比较常见的结构形式之一, 其结构体系通常为梁支撑空间屋盖和空间桁架或其它整体式屋盖。前者的第一阶模态为梁在竖向的振动, 可以用一维正弦曲线描述; 而后者在风荷载作用下屋面发生类似弹性薄板的竖向振动, 第一阶模态可以用两个正弦曲线的乘积形式描述[3; 7; 46; 66; 67; 68; 69]。Uematsu等[3; 7; 46; 66; 67; 68; 69]把GLF定义成最大风致响应与平均响应的比值, 设计风荷载便可以方便地表示成为平均风荷载与GLF的乘积形式。结合风洞试验, 作者对这些几何形状较为规则、对称和简单的不用考虑内压的封闭式大跨度屋盖的GLF进行了比较系统的研究, 并建立起一系列的GLF经验公式。

需要说明的是, 尽管文献[3]第一次提到了多阶模态力, 但是文献[3; 7; 46; 66;

67; 68; 69]在计算GLF时还是仅仅考虑了第一阶模态力,这是因为在所研究的大跨度屋盖中,响应主要由第一阶模态控制,对GLF进行研究时,常常只需考虑第一阶模态力作用的结果。

Uematsu提出的方法[3; 7; 46; 66; 67; 68; 69]优点在于计算简便、快捷,但是该方法主要还是考虑位移响应的影响。Kareem等[56; 59]指出:尽管GLF最初是对任何荷载效应定义的,但是实际上它是基于位移响应的,也就是说GLF本质上是峰值位移响应和平均位移响应的比值(笔者注:文中称为DGLF,又称为 traditional GLF),并且该因子不加区别地应用到其它响应,这样默认为对任何结构响应的GLF与位移响应因子一样,这将产生不正确的ESWL估计。也即根据位移响应获得的GLF所确定的ESWL保证了最大位移的正确估计,却没有考虑风荷载的等效与其它响应有关,按照位移等效的确定的风荷载不一定能成为结构其它响应的最不利荷载[65]。对于大跨度屋盖,存在多荷载分布、多等效目标响应的特点[70],因而仅仅考虑位移响应的GLF是不够的和不正确的。Lou等[9]基于准定常假定,对一柔软弹性方形大跨平屋盖的风致抖振响应和加速度的GLF(笔者注:文中称为风荷载因子 wind load factor)进行了研究。作者[9]发现:GLF在不同点上是不同的,它在屋盖上的分布是一个曲面,与第一阶模态的形状相似;GLF随着风向角的变化而急剧变化,屋盖上的GLF的最大值在0度时大于45度,尽管位移响应在0度时稍许小于45度;同时GLF随风速和屋盖柔性的增加而适度地增加。

同时Uematsu提出的方法[3; 7; 46; 66; 67; 68; 69]在计算位移响应时没有考虑结构的非线性,这对比较刚性的大跨度屋盖是合适的,对于柔性大跨度屋盖,需要考虑结构非线性影响。对于非线性结构,上述GLF法会低估结构响应,导致设计的不安全[71; 72]。Shen等[40]对双曲抛物面悬索屋盖的GLF进行了研究。基于时域分析,作者[40]首先用随机振动离散方法计算了该几何非线性体系的风致响应——节点位移响应和索单元内力响应,然后基于使用极限状态提出了两种响应的最值动力系数(即GLF),为了便于实际设计,作者[40]最后提出了椭圆形和菱形屋面的控制响应的与荷载参数、结构参数和几何参数有关的GLF经验公式。Suzuki等[73]对一结构外形相对复杂的半刚性(弹性)单向悬索屋盖的风致响应和GLF(笔者注:该文中叫荷载影响系数 load influence coefficient)进行了研究,计算中考虑了结构几何非线性,结果发现:主跨索内轴力的GLF几乎都是2.0,与跨上位置无关;主跨上各点的竖向位移GLF从3.6变到6.5,因此依靠变形来定义一个屋盖上任何位置的GLF特殊值是困难的;此外弯矩的GLF与竖向位移几乎有着同样的特征。

此外Uematsu提出的方法[3; 7; 46; 66; 67; 68; 69]仅考虑了一阶模态的贡献,

忽略了高阶振型的影响,实际上对于某些常用的大跨度屋面结构的自振频率比较密集,屋面结构的风致响应及GLF受高阶振型影响较大,高阶振型的贡献不可忽略。为此文献[74]对一刚接单层格构式大跨圆屋顶的风致响应和GLF(笔者注:该文中叫阵风影响因子gust effect factor)进行了研究。作者[74]认为在通常的设计风速作用下,屋盖的动力运动可以用线性系统来表现,研究表明:对高矢跨比结构,第一阶轴对称模态通常非常重要,GLF法能够用来估算屋盖上的ESWL(笔者注:该文中叫做设计风荷载),基于荷载效应(比如单元应力)的GLF大约为3.0;对低矢跨比的屋盖,由于多阶非对称模态参与振动,由单一的GLF法就难以反映这种多模态参与组合的情况,所以作者提出了组合多阶模态力来计算低矢跨比结构的设计风荷载,即ESWL:

$$\{P_e\} = \{\bar{P}\} + \sum_{i=1}^M C_i \text{sign}(\bar{P}_i) \{\phi_i\} \sigma_{P_i} R_i \quad (1.3)$$

式中,  $\text{sign}(\cdot)$  为符号算子,  $\{\bar{P}\}$  为(时间)平均风荷载,  $\bar{P}_i$  为第  $i$  阶模态力  $P_i(t)$  的(时间)平均值,  $\{\phi_i\}$  为第  $i$  阶振动模态,  $\sigma_{P_i}$  为第  $i$  阶模态力  $P_i(t)$  的标准偏差,  $R_i$  为第  $i$  阶振动模态的共振放大因子,  $C_i$  与矢跨比、模态形状和模态阶数有关的常数,作者给出了  $C_i$  的一些试探性值。

尽管上述GLF法使用很简单,但依然存在一定的局限性:①该方法给出的ESWL与平均风荷载是同分布的,这个假定对小型结构可能是一个合理的假定,此时空气动力学中的准定常假定是有效的,对于简单悬臂结构,通常产生能满足期望精度要求的可以接受的结果,然而对于其它结构形式,GLF法可能产生令人误解的结果[75];②GLF(笔者注:该文中说的是GRF)法是一种权宜之计,甚至对简单结构所得到的结果都存在极大的变化范围[72];③如果结构的平均风荷载或平均响应为零时,GLF法是没有意义的[56; 59; 76];④传统的GLF(笔者注:该文中叫GRF)法是基于风荷载是平稳随机过程的假定,这对于大尺度风场系统是合适的,因为此时该种风场是相当的平稳,然而当风荷载是非平稳随机过程如小尺度的雷暴,用GLF法预测的ESWL会过于低估真实响应,得不到好的结果[77];⑤Li等[48; 78; 79]则强调指出GLF法在大跨度屋盖的稳定性分析中并不合适,较大的GLF因子在某些情况下反而会导致结构较低的安全性,作者并从稳定性的角度推导了单层球形网壳和单层柱壳的ESWL最不利分布(笔者注:该文中叫最不利估计方法, the most unfavorable distribution estimation method),能够保守地估算出脉动风荷载对结构变形和稳定性的影响,并能够为下文将要介绍的Holmes提出的方法[75]给出一个合适的参考响应。

由上面分析可知,对于大跨度屋盖的ESWL,有必要寻找更加合理的方法。

### 1.3.2 基于荷载响应相关系数法(LRC 法)的 ESWL 研究

在大跨度屋盖的ESWL研究历史过程中，基于荷载响应相关系数法的ESWL方法具有里程碑的意义，它大大地推动了ESWL研究方法的发展进程。

#### 1.3.2.1 荷载响应相关(load-response-correlation,LRC)系数法

在结构的顺风向响应谱中，人们把风致响应分成平均响应、背景响应和共振响应，以便对各个分量采取不同的措施来求解ESWL，正如文献[57; 65]指出：人们对风致响应谱的分解第一次提供了把ESWL分解成静态贡献、准静态贡献和共振贡献三部分的机会。基于上述风致响应谱，人们开始对结构的ESWL开始进行研究，其中荷载响应相关系数(load-response-correlation ,LRC)法[71; 72; 80]理论起了十分重要的作用。其实文献[57]在提出GLF时，已经注意到了脉动风风致响应中存在背景响应和共振响应，但是在二者对应ESWL的求解问题上，一致没有进行很好的区分，直到LRC法的提出。

LRC法[71; 72; 80]是Kasperski等在研究低矮房屋风洞试验基础上发展起来的一种基于荷载和响应之间的相关性来计算背景等效静力风荷载的方法，其表达式如下：

$$P_e(r_i) = \overline{P_k} + g\rho_{r_i, P_k}\sigma_{P_k} \quad (1.4)$$

式中， $P_e(r_i)$ 为峰值响应 $r_i$ 对应的ESWL模式，描述了最常见的极限荷载模式； $\overline{P_k}$ 为平均风荷载； $g$ 为峰值因子，其取值依赖于时间周期和响应的概率分布，这与10分钟平均风速时距有关，一般说来，峰值因子值在2.5到5.0的范围内变化[78]，不过Tamura等[81]却发现根据不同地点、不同荷载效应求得的内力的值峰值因子取值差异较大； $\rho_{r_i, P_k}$ 为脉动风荷载 $P_k$ 和峰值响应 $r_i$ 之间的相关系数，又叫权重因子； $\sigma_{P_k}$ 为脉动荷载 $P_k$ 的均方根。

如果平均风荷载或平均响应等于零，GLF法得不出什么结果，而LRC法对这两种情况都有解，因而LRC法是一个更加普遍和全面的方法[72]。设计中不止考虑一个响应时，关于哪一个荷载用于哪一个响应的问题，GLF法需要更多和更进一步的评论，而LRC对此加以了解决，它会产生一个更易懂的ESWL概念[72]。因为相关性分析过滤掉了对所考虑的响应没有贡献或贡献很小的脉动荷载部分，从而体现了对响应有效的脉动荷载分布[71; 72]，LRC法提供的荷载分布是一种最可能的、能够真实发生的分布，具有明确的物理含义[58; 72]。对于有着相同几何形状及其关联的风荷载特征但不同结构体系的建筑，GLF法通常对每个体系需要定义不同的ESWL，而这些ESWL将彼此完全不同，GLF因子也将在负无穷大到正无穷大的范围内变化，但是LRC法定义的极限荷载分布对于不同的静力体系或多或少是相似的[58; 71]。无论荷载过程是Gaussian过程还是非Gaussian过程，

LRC法均能给出很好的真实荷载模式[71; 72](笔者注: Tamura等[81]认为LRC方法用来估算框架一般地点的真实极值风荷载是有效的, 但唯一例外情况就是陷于前缘附近的框架处, 该处的非Gaussian特征是显著的。)。LRC法使得结构工程师和风工程师有了一个强有力的工具去逼真地描述具有准静态特性的线性结构的风效应, 对于一个弱的非线性结构, LRC法所得结果也非常接近, 从而使安全、经济的设计成为可能[72]。

在ESWL方法的发展中, LRC法是一个重要的里程碑, 在坚实的理论基础上, 它使准静态的背景脉动风荷载的期望ESWL分布用公式表示成为可能, 当共振响应可以忽略时, LRC方法能够用来确定共振响应的ESWL分布分量, 但是LRC方法不能考虑共振放大的可能性[75; 82]。而实际上对于大跨度屋盖结构尤其是柔性大跨度屋盖结构, 其风致响应需要考虑共振影响, 对应的等效风荷载也需要考虑共振影响。

### 1.3.2.2 基于 LRC 系数法的与结构振动模态有关的 ESWL 研究

Holmes[75]认为类似在体育运动场的大跨度屋盖中, 背景响应和几阶共振响应非常重要, 其总的峰值响应表达式为:

$$\hat{r}_T = \bar{r} + \sqrt{\hat{r}_B^2 + \hat{r}_{R,1}^2 + \hat{r}_{R,2}^2 + \hat{r}_{R,3}^2 + \dots} \quad (1.5)$$

式中,  $\bar{r}$  表示平均响应,  $\hat{r}_B$  表示最大背景响应,  $\hat{r}_{R,i}$  表示  $i(i=1,2,\dots)$  阶模态的最大共振响应。式(1.5)就是常用的SRSS法, 它基于结构的振动模态之间是非耦合的假定。

相应ESWL的三分量(包括平均分量、背景分量和共振分量)表示法为[75]:

$$p_e(z) = \overline{p(z)} + W_B p_B(z) + W_{R,1} p_{R,1}(z) + W_{R,2} p_{R,2}(z) + \dots \quad (1.6)$$

式中,  $W_B$ 、 $W_{R,k}$  ( $k=1,2,\dots$ ) 分别为背景风荷载、第  $k$  阶惯性力(仅含共振区的能量)的权值系数, 与响应有关。

Holmes方法的背景分量是脉动引起的准静态荷载, 相当于考虑了所有的结构振动模态的贡献[58]。

Chen等[70]也利用三分量表示法对大跨度屋盖的ESWL进行了研究:

$$\{P_e\} = \{\overline{P}\} + \text{sign}(\bar{r}) \cdot [w_b \{P_e^b\} + w_r \{P_e^r\}] \quad (1.7)$$

式中,  $\{\overline{P}\}$ 、 $\{P_e^b\}$ 、 $\{P_e^r\}$  分别表示ESWL的平均分量、背景分量和共振分量;  $w_b$ 、 $w_r$  分别表示背景分量和共振分量的权重因子。

在文献[70]中, 作者指出: 由于大跨度屋盖体型复杂, 流场存在明显的三维效应和不稳定性,  $\{\overline{P}\}$  常需要通过风洞试验或CFD数值模拟方法来确定;  $\{P_e^b\}$  用LRC-POD方法确定, 可以表示成脉动风场的各阶主导本征模态与其对应的加权

因子乘积的线性组合形式； $\{P_e^r\}$ 用通过Ritz-POD方法选出的结构主导模态的惯性力表示。在Chen等提出的方法[70]中，作者建立了ESWL与风荷载基本特征(比如平均风荷载和CPT模态)和结构动力特性(比如振动模态和Ritz向量)间的直接联系。

在用三分量方法计算其中的共振分量时，Holmes[75]和Chen等[70]均假定结构模态间的耦合作用可以忽略。事实上，在求解大跨屋盖ESWL的共振分量时，需要考虑多模态之间的耦合影响[17]。Zhou等[17]同样采用三分量方法计算大跨屋盖的ESWL，其中作者基于计算共振分量的修正SRSS法，提出了用LRC法和考虑模态耦合系数的惯性风荷载相结合来表示大跨屋盖脉动风荷载的ESWL：用LRC法计算脉动风荷载的ESWL的背景分量，用考虑模态耦合的惯性风荷载法计算脉动风荷载的ESWL的共振分量。

与三分量表示方法不同的是，Fu等[83]认为没有必要把(脉动)动力响应分解成背景分量和共振分量，可以把大跨度屋盖的ESWL表示成平均分量和动力分量二分量之和，其中动力分量为每个关心的振动模态所贡献成分的一系列线性组合，相当于考虑了三分量中的背景分量和共振分量之和：

$$\{P_e\} = \bar{p} + g \sum_{j=1}^m \{P_j\} \sigma_{q_j} W_j \quad (1.8)$$

式中， $g$ 表示峰值因子； $\bar{p}$ 表示平均风荷载； $\sigma_{q_j}$ 表示第 $j$ ( $j=1,2,\dots,m$ )阶模态位移 $q_j(t)$ (笔者注：该文中用到了模态位移叠加法)的均方根； $\{P_j\}$ 表示第 $j$ 阶模态的惯性力； $W_j$ 表示ESWL中的第 $j$ 个成分的权重因子。

在文献[83]中，作者认为没有必要直接计算荷载和响应的相关性，因为通过传统方法计算该相关性是比较困难的；作者[83]也认为该方法的关键优点在于总动力响应直接可采用CQC法来计算；和文献中现行方法相比较，该方法能够用于所有种类的复杂结构(比如有着三维多模态耦合响应和密集自振频率的大跨桥梁、大跨度屋盖或高层建筑)；对于时空变化的风荷载，用该ESWL模式不仅对简化设计风荷载(该荷载有助于修正目前的设计标准和规范以便准确预测结构上的风效应)的确定非常有吸引力，而且为设计实践中的风洞试验数据的直接应用建立了有价值的框架。

不过需要指出的是：Fu等提出的方法[83]的计算(尤其是 $W_j$ 的计算)过程是比较复杂的；此外在推导公式过程中认为风致位移响应有着准静态特性，这对于比较刚性的大跨度屋盖可能是比较恰当的，而对于比较柔性的大跨度屋盖，在这一点上值得商榷。

在上述方法[17; 70; 75; 83]中，存在着一些共同的缺陷：

- 1) 文献[70; 75]虽然考虑了背景和多个结构参振模态的共振响应，但令人遗

憾的是必须假定参振模态之间能够很好地分离或模态间耦合响应不明显, 而常见的大跨度屋盖结构不仅要包含多模态的贡献, 而且应该考虑不同模态响应之间的耦合影响。虽然文献[17; 83]在响应分析和ESWL求解中考虑了多模态响应贡献和模态响应相关性(笔者注: 即考虑了不同模态响应之间的耦合影响), 但是分析过程比较复杂, 并不适宜工程应用;

- 2) 在上述方法中, 都牵涉到结构振动模态的选取, 究竟该选取多少阶模态和怎样选取主导模态, 这些问题一直是大跨度屋盖结构风致响应和ESWL计算中的难点。虽然Chen等[70]对此进行了一定研究, 但定性分析和定量分析还值得进一步研究的必要。

由以上分析可知: 已有的与结构振动模态有关的ESWL计算方法并不完美, 因而有必要寻找更加精确的方法。

### 1.3.3 一致静力等效风荷载

风致响应在时间和空间上都是多变的, 因而所有结构单元的最大(绝对值最大)荷载响应不会同时发生; 但在设计的初步阶段, 能得到所有结构单元同时产生最大荷载响应的一致静力等效风荷载(universal ESWL, U-ESWL)分布是有很用的, 尽管在结构设计阶段可能存在一些小的变化[84]。一致静力等效风荷载表达式如下[84; 85]:

$$\{P_e\} = [\Phi]\{C\} \quad (1.9)$$

式中,  $\{P_e\}$  表示一致静力等效风荷载,  $[\Phi]$  表示脉动风场的CPT本征模态, 其中列向量为CPT模态, 表示荷载的空间分布形式;  $\{C\}$  表示贡献系数列向量, 由下式进行求解:

$$\{r_o\} = [I_r][\Phi]\{C\} = [R_0]\{C\} \quad (1.10)$$

式中,  $\{r_o\}$  表示所有结构单元的最大荷载效应;  $[I_r]$  表示影响函数矩阵, 其中列向量为单位力引起的响应, 如果  $\{r_o\}$  为节点位移等效目标响应,  $[I_r]$  便为结构柔度矩阵。

由式(1.10)可知: 如果  $[R_0]$  是正规的并且是可逆的, 则  $\{C\}$  有唯一的精确解, 由式(1.9)所确定的  $\{P_e\}$  是唯一精确的ESWL; 如果式(1.10)中未知数的个数远远大于联立方程组的个数, 则  $\{C\}$  的解不唯一, 由式(1.9)所确定的  $\{P_e\}$  也不唯一; 如果式(1.10)中未知数的个数远远小于联立方程组的个数, 则  $\{C\}$  的精确解不存在, 但可以用最小二乘法得到其近似解, 此时由式(1.9)所得到的  $\{P_e\}$  也只能是近似的ESWL, 不过在范数意义上是最优的。

由式(1.10)可知, 一致静力等效风荷载方法直接从风场CPT模态出发求解结构的ESWL, 与结构振动模态无关, 因而它避开了选取振动模态以及考虑振动模态耦合的麻烦。也就是说采用与结构振动模态无关而仅与风场CPT模态有关的

ESWL计算方法具有如下优点：与空气动力特性有关，更加真实地考虑了风场的时空变化；此外与基于LRC系数法的ESWL研究相比，它简化了荷载响应之间相关性的计算。

不过需要指出的是，文献[84; 85]用到最小二乘法在求解 $\{C\}$ 时，经常遇到未知数个数远远小于联立方程组个数的情况，当等效目标响应不为(绝对值)最大值时，误差往往较大，得到的ESWL也常是近似值；此外文献[12; 13; 20]在用CPT模态计算结构响应时，仅仅考虑了响应的背景分量部分，因此文献[70; 75; 82]在采用CPT模态计算大跨度屋盖的ESWL时，也仅仅计算了背景分量部分，该方法用来计算刚性屋盖的ESWL是比较合适的，而对于共振响应比较突出的大跨度屋盖，用该方法计算的ESWL并不能真实反映荷载情况。

通过对以上所有ESWL方法的对比分析，笔者认为采用与结构振动模态无关而与风场CPT模态有关的ESWL计算方法不失为一种计算大跨度屋盖ESWL的简单易行的方法，但需要进行一定的改进。

## 1.4 目前大跨度屋盖研究存在的主要问题和不足

时至今日，各种形式的大跨度屋盖在社会经济和文化交流中发挥着越来越重要的作用，大跨度屋盖的抗风研究日益受到人们的重视。尽管在大跨度屋盖的抗风研究已经取得了比较丰硕的成果，但是依然存在一些主要问题和不足：

- 1、风荷载特性的分析。目前有部分研究者在对大跨屋盖进行抗风研究时，首先对风荷载特性进行研究。比如数学分析中的本征正交分解(POD)理论已经在大跨屋盖的风荷载特性分析中得到了大量的运用。尽管关于风场的POD理论已经非常完善，但是既有方法在考虑风场本征模态的贡献时，常常仅限于本征值的相对大小来判断，因此不能完整地分析风场，需要综合其它相关参数进行风场分析。
- 2、风致响应的计算有待深入研究。目前现有的频域计算方法较能有效地考虑一些结构形式简单、线性特征突出的大跨度屋盖风致响应，但是不能比较准确地计算出结构形式多样化、非线性明显和动力反应复杂的大跨度屋盖风致响应，因而有必要寻求其它更加精确的方法。综合考虑结构特征和风荷载特征，利用经典的时域方法对大跨度屋盖的风致非线性响应(包括风致线性响应)进行研究便是一个很好的选择。
- 3、ESWL 也有待进一步研究。现有方法主要针对结构构件数量较少、结构形式简单、结构风致响应简单的大跨度屋盖；而且某些方法的计算过程和计算理论比较复杂，不太适合工程运用。随着科学技术的发展，结构构件数量众多、结构形式复杂的大跨度屋盖会如雨后春笋般涌现，因而



风致响应也会变得异常复杂。如何寻求一种能有效解决这种复杂大跨度屋盖的而且计算方法简单、计算精度较高、工程实用性强和能充分反映出复杂风致响应的 ESWL 计算方法, 值得广大研究人员深思熟虑。

## 1.5 本文的研究目的和主要内容

针对目前现有大跨屋盖中的风场POD理论、风致响应和ESWL理论成果的不足, 本文主要对这些方面的问题进行理论上的研究, 以期更加深入掌握这类结构的风致响应特性和ESWL特性。

本文的主要内容具体安排如下:

第1章为绪论。本章主要对现有大跨度屋盖风致响应和ESWL的理论成果进行评述, 为本文的主要研究内容奠定基础。

第2章为本征正交分解(Proper Orthogonal Decomposition,POD)法在风荷载分析中的运用。本章主要对POD的相关知识进行介绍, 并通过算例来了解POD的分析过程, 为第5章大跨度屋盖脉动风ESWL的研究奠定基础。既有方法在考虑风场的贡献时, 常常仅限于本征值的相对大小来判断, 本章提出可以综合其它相关参数一起分析风场的贡献, 有助于正确理解风场。

第3章以大跨预应力索网屋盖为例对大跨度屋盖的几何非线性问题的基础理论进行研究, 便于为第4章大跨度屋盖几何非线性问题的应用研究奠定理论基础。本章首先简要地阐述了经典的几何非线性有限元理论, 然后据此有针对性地、系统地推导了预应力鞍形索网屋盖的几何非线性有限元理论。初应力刚度矩阵是预应力索网屋盖非线性计算过程中一个非常重要的参数, 本章采用新的叠加方法对该矩阵进行了推导, 并推导出整体坐标系下初应力刚度矩阵的新形式。

第4章为大跨度屋盖几何非线性问题的应用研究, 是本文主要研究内容之一。在第3章的基础上, 本章对大跨预应力索网屋盖设计过程中的结构找形尤其是结构风致响应进行了详细地研究。在对结构进行风致响应计算时, 本章采用了三种不同方案进行对比分析, 发现结构的风致响应可以近似看成是在平均风荷载引起的几何非线性响应基础上叠加脉动风荷载引起的线性响应的结果。

第5章为大跨度屋盖脉动风ESWL的研究, 该章也是本文主要研究内容之一。本章采用与结构振动模态有关的惯性力组合法和与结构振动模态无关而仅与风场CPT模态有关的方法两种方案对ESWL进行研究, 得出了一些适应于求解复杂大跨屋盖ESWL的新方法。新方法结合了风致响应的特点, 具有物理含义明确、计算方法简单和计算精度较高的优点, 同样可以适用于求解其它复杂结构的脉动风ESWL。

第6章为结论。本章系统总结了本文在理论计算方面所取得的一些成果, 最

后对有待进一步研究的问题提出了建议。

## 第2章 风场中的本征正交分解法

### 2.1 引言

本征正交分解法(Proper Orthogonal Decomposition,POD)是一种强有力的数学统计工具,是分析复杂随机场的有效手段之一,它把传统数学领域中很多概念延伸到了随机过程中,自20世纪40年代以来,它便在不同的领域得到广泛地应用[12]。在结构风工程领域,自从Armitt[86]将POD用于考虑冷却塔的风压脉动后,该方法便在风工程领域研究中得到了广泛应用。以此来简化各种结构表面的风荷载计算[46; 87; 88; 89; 90; 91; 92; 93; 94; 95; 96; 97; 98; 99; 100; 101; 102; 103]和对风场进行预测和模拟[74; 104; 105; 106; 107]。并用来计算结构的风致响应[12; 13; 14; 19; 20; 23; 108; 109; 110]以及进行静力等效风荷载的研究[75; 84; 85; 111]。

在本文第5章大跨度屋盖脉动风ESWL的研究内容中,需要用到POD方面的知识,因此本章就POD的相关内容进行必要阐述,并通过算例来了解POD的分析过程,为ESWL的研究奠定基础。

本章首先对POD的基本原理进行阐述,对POD的数值计算过程及各个参数的性质进行阐述,并重点分析了两种不同风场——整体风场和脉动风场中POD理论的区别和联系,以期正确理解脉动风场的POD理论。最后本文采用一个复杂的大跨屋盖对POD的理论进行全面系统的阐述。

尽管关于风场的POD理论在风场特性分析方面已有很多的运用,本章还是提出了一些新的观点:既有方法在考虑风场本征模态的贡献时,常常仅限于本征值的相对大小来判断,本章提出可以综合其它相关参数一起分析风场本征模态的贡献,有助于正确理解风场;此外因为主坐标性质比较简单,而风场性质比较复杂,而二者之间具有一定的等价性,本章也建议用主坐标的性质来研究风场性质。

### 2.2 POD 基本原理

#### 2.2.1 POD 简介

POD方法是Lumley在1967年提出的,其数学原理是Karhunen-Loève展开,它有着不同的称呼:主成分分析(Principal Component Analysis)或霍特林分析(Hotelling Analysis)、经验成分分析(Empirical Component Analysis)、准简谐模态(Quasi-Harmonic Modes)分析、奇异系统分析(singular systems analysis)、奇异值分解(Singular Value Decomposition)、经验本征函数分解(Empirical Eigenfunction

Decomposition)等等, 它与应用在心理学和经济学中的因子分析(Factor Analysis)技术密切相关[112; 113]。

POD 的优点在于它能够大大减少再现原始现象所需要的存储数据量, 因而常被看作为一种独特的过滤技术和数据压缩工具, 起着较大的优化作用[20; 87; 88; 114; 115; 116; 117; 118; 119; 120; 121; 122]。和其它线性正交分解方法相比, POD 一个引人注意的特点是它提供了随机场的一种优化表示法, 因而适用于获得复杂随机场的低维描述[123]。POD 也可以对不完善的、有缺陷的和丢失的数据进行修补和重建以便获取完整数据[104; 124]。

POD 分解可以用于时域和频域分析, 其变换通常有两种形式[12]: ①当 POD 用于时域分析时, 根据随机场协方差矩阵获得的正交模态称为协方差模态, 此时 POD 变换可称为协方差本征变换(Covariance Proper Transformation, CPT), 通常协方差模态简称为 CPT 模态; ②当 POD 应用于频域分析时, 根据随机场互功率谱密度矩阵获得的正交模态称为谱模态, 此时 POD 变换可称为谱本征变换(Spectral Proper Transformation, SPT)[12; 13; 19; 20; 108; 110; 125; 126], 通常谱模态简称为 SPT 模态。

在上述两种形式的变换中, 第①种形式的POD变换不包含随机场的平均分量, 而只研究其脉动分量部分[113; 114], 即所研究的随机场为零均值随机场[13; 20], 本章在下文中对不包含平均风荷载而仅含脉动风荷载的风场称为称为脉动风场。本章下文中还牵涉到由随机场自相关矩阵得出的模态, 此时的POD变换为相关本征变换(Correlation Proper Transformation), 本章对此变换得到的模态也不加区别地称为CPT模态, 把相关本征变换所采用的风场称之为整体风场, 它是平均风荷载和脉动风荷载的总和。在第5章的ESWL研究内容中, 不涉及上面的第②种变换形式, 因而本章只介绍CPT的相关内容。

POD 的基本原理是将一个随机场表示为一系列正交基函数的线性组合——即正交基函数的级数展开形式, 使得随机场相对于基函数的各个分量互不干扰 [127; 128]。这些确定性正交基函数称为 POD 模态(或经验本征函数、形状函数), 而正交基函数的组合系数称为 POD 的主分量。POD 定义了一个新的 Cartesian 坐标系, 以此来识别协方差主方向(即模态), 沿着这些主方向的随机场分量叫做协方差本征分量或协方差主分量(即主坐标)[126]。POD 能够有效再现原始脉动现象的新坐标系, 有助于我们更好地理解物理现象[87; 114], 它是一种有效的线性坐标变换技术[114]。

一般来说, POD 特征值的大小决定了模态贡献的大小。特征值越大, 模态贡献越大, 因此 POD 的数值优点便在于随机场常常可以通过截断较小本征值对应的高阶模态后的降阶表示法来加以描述[20], 文献[19; 89; 91; 114]等已经证明

了基于 POD 技术对风荷载的高阶模态截断后，有助于加速总体风荷载及其风致响应的计算。当然降阶表示法必须保证随机场的重要特征没有变化，得出的修正结果是可以接受的[20]。

## 2.2.2 POD 基本原理的数值计算过程及特性

首先在此强调的是，本章在阐述 POD 原理时不加区别地把随机场当作风场。

POD 展开技术有离散型和连续型两种情况[12]，风洞试验获取的数据往往是一组离散型数据，因此在 POD 展开技术中常常应用到离散型 POD 技术[12; 20]，在本章中只介绍离散型 CPT，相关结论可类推到连续型 CPT 中。

### 2.2.2.1 特征方程的建立及其求解

POD 特征方程的推导方法很多，本章参考文献[129]中利用拉格朗日乘子法求解优化问题的思路，来进行推导。

现设  $P = [P(x_k, y_k, z_k; t_i)] \in R^{M \times N}$  (符号  $R^{M \times N}$  表示  $M$  行  $N$  列的实矩阵) 是结构上的离散型风场矩阵，风荷载的单位为国际单位。此处的  $P(x_k, y_k, z_k; t_i)$  是空间位置  $(x_k, y_k, z_k)$  处的三维方向合力时程，如果把  $P(x_k, y_k, z_k; t_i)$  在 Euclidean 空间中分解成 3 个方向的时程，则  $P \in R^{M \times 3N}$ ，以下本征值、模态相应的个数以及模态中元素的构成也要发生相应的变化。在上述参数中， $N$  表示  $P$  所作用的节点数； $t_i (i=1, 2, \dots, M)$  表示离散时间点， $M$  表示试验时测点采样样本总长度(个数)。为计算方便，令  $P$  中列向量为风荷载时程。

POD 分析的主要目的便是寻找确定性的坐标函数  $\phi(x_k, y_k, z_k)$  (简称为  $\phi_k$ ) 即模态或基，使  $\phi_k$  与一组随机风场  $P$  的所有元素是相关的，并进而可以提取出风场的主坐标， $\phi_k$  是通过使  $P$  在  $\phi_k$  上的投影(即内积)最大化推导而来，也就是从概率分析的观点来实现，即[87; 89; 114]:

$$\max_{\phi} (P, \phi_k) \quad (2.1)$$

式中，符号  $(\cdot, \cdot)$  表示内积算子； $\max$  表示求最大值。

式(2.1)正负号不确定，可以对式(2.1)在时域内进行均方求值使其正定并正则化如下：

$$\max_{\phi} \frac{E\left(\left|(P, \phi_k)\right|^2\right)}{\|\phi_k\|^2} \quad (2.2)$$

式中， $E(\cdot)$  表示统计平均算子； $|\cdot|$  表示模； $\|\cdot\|$  表示 Euclid 范数。

为了得到唯一的  $\phi_k$ ，将其规格化而规定  $\|\phi_k\|^2 = 1$ ，这就是一个带有约束方程的优化问题，可以用拉格朗日乘子法[130]进行求解，对应的关于  $\phi_k$  的拉格朗日

函数为:

$$L(\phi_k) = E\left(\left|(P, \phi_k)\right|^2\right) - \lambda_k (\|\phi_k\|^2 - 1) \quad (2.3)$$

式中,  $\lambda_k$  为拉格朗日乘子。

因为  $\phi_k$  为离散型空间位置函数, 所以  $L(\phi_k)$  不便于对  $\phi_k$  求导, 对其自变量  $\phi_k$  加上一个微增量  $\delta\psi$  再对  $\delta$  求导:

$$\left. \frac{d}{d\delta} L(\phi_k + \delta\psi) \right|_{\delta=0} = 0 \quad (2.4)$$

利用复合函数求导方法对式(2.4)展开可得:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\delta} L(\phi_k + \delta\psi) \right|_{\delta=0} &= \left. \frac{d}{d\delta} \left[ E\left(\left|(P, \phi_k + \delta\psi)\right|^2\right) - \lambda_k (\|\phi_k + \delta\psi\|^2 - 1) \right] \right|_{\delta=0} \\ &= 2 \left[ E\left((P, \phi_k + \delta\psi)(P, \psi)\right) - \lambda_k (\phi_k + \delta\psi, \psi) \right] \Big|_{\delta=0} \\ &= 2 \left[ E\left((P, \psi)(\phi_k, P)\right) - \lambda_k (\phi_k, \psi) \right] = 2E(\psi P^T P \phi_k) - \lambda_k \psi \phi_k \\ &= 2\psi \left( E(P^T P) \phi_k - \lambda_k \phi_k \right) = 2\psi (R_p \phi_k - \lambda_k \phi_k) = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

式中,  $R_p$  表示  $P$  的空间自相关矩阵, 其中的第  $i$  行第  $j$  列相关系数为:

$$R_p(i, j) = E\left[\{P(:, i)\}, \{P(:, j)\}\right] = \frac{\{P(:, i)\}^T \{P(:, j)\}}{M} \quad (i=1, 2, \dots, N; j=1, 2, \dots, N) \quad (2.6)$$

式中,  $\{P(:, i)\}$  表示  $P$  中第  $i$  列向量,  $\{\cdot\}^T$  表示列向量的转置。

由于  $\psi$  是任意选取的, 因而由式(2.5)得出特征方程:

$$R_p \phi_k = \lambda_k \phi_k \quad (2.7)$$

式(2.7)也叫齐次弗雷德霍姆积分方程式(Homogeneous Fredholm Integral Equation)或线性齐次代数系统[12]。然后由式(2.7)可以求解  $R_p$  的非平凡解, 为本征值  $\lambda_k$  和模态  $\phi_k$ 。在本章中,  $\phi_k (k=1, 2, \dots, N)$  默认为一个列向量。

本章在 POD 分析中还牵涉到协方差(去掉平均值)矩阵, 其特征方程形式为:

$$C_p \phi_k = \lambda_k \phi_k \quad (2.8)$$

式中,  $C_p$  为协方差矩阵, 其中第  $i$  行第  $j$  列协方差为:

$$\begin{aligned} C_p(i, j) &= \text{cov}\left[\{P(:, i)\}, \{P(:, j)\}\right] \\ &= \frac{\left\{ \{P(:, i)\} - E[\{P(:, i)\}] \right\}^T \left\{ \{P(:, j)\} - E[\{P(:, j)\}] \right\}}{M} \\ &= R_p(i, j) - E[\{P(:, i)\}] E[\{P(:, j)\}] \end{aligned} \quad (2.9)$$

式中,  $\text{cov}[\cdot]$  表示协方差算子。

由式(2.6)和式(2.9)不难得知, 当风场为脉动风场时,  $R_p$  和  $C_p$  是完全一致的。

在本章中， $R_p$  和  $C_p$  的本征值和模态不加区分地以相同的符号表示。

在求出所有的  $\lambda_k$  和  $\phi_k$  后，需要对  $\lambda_k$  按从大到小的顺序进行降序排列，并对  $\phi_k$  进行相应的排序，本章中本征值和模态都是已经排序后的结果。

### 2.2.2.2 本征模态性质

#### 1、正交性

$R_p$  和  $C_p$  均是对称正定实矩阵，它们的本征值是实数且是正数，模态是实向量[12; 13; 20]，且满足下面的正交性条件[12; 123]：

$$\Phi^T \Phi = I \quad (2.10a)$$

和

$$\Phi^T R_p \Phi = \Lambda \quad (2.10b)$$

或

$$\Phi^T C_p \Phi = \Lambda \quad (2.10c)$$

式中， $\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_K] \in R^{N \times K}$  表示模态矩阵； $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K\}$  表示本征值组成的对角矩阵。

由式(2.10b)和式(2.10c)， $R_p$  和  $C_p$  分别有如下形式的谱分解[12; 13]：

$$R_p = \Phi \Lambda \Phi^T = \sum_{i=1}^K \phi_i \phi_i^T \lambda_i = \sum_{i=1}^K \lambda_i \phi_i^2 \quad (2.11a)$$

$$C_p = \Phi \Lambda \Phi^T = \sum_{i=1}^K \phi_i \phi_i^T \lambda_i = \sum_{i=1}^K \lambda_i \phi_i^2 \quad (2.11b)$$

模态的正交性意味着每阶模态在空间是独立的[113]。

#### 2、贡献性质

在模态矩阵中，第一阶模态包含了最大的能量，其次是第二阶模态，依此类推[95]。

在用 POD 进行结构抗风研究时，常常需要多阶本征模态。在对风场进行重构以及对风场进行预测时，文献[20; 89; 95; 104; 106; 123]均阐述了考虑多阶模态的必要性。而在计算结构风致响应时，文献[102; 123]也发现要想准确求得结构的响应，也需要考虑多阶模态的影响。文献[20; 123]从物理机理上对是否需要多模态进行了解释：当考虑的随机场在不同空间尺度上是强相关(即相关性好的随机场)时，POD 降阶表示法特别有效，它使得原始随机场在少数前几阶模态的投影保持着大部分能量；而相关性弱的随机场尤其是在表示小尺度湍流的高频脉动时，需要相对较多的模态，因此 POD 降阶表示法的有效性便受到一定限制。

整体风场中第一阶模态常常占据着绝对重要的地位，利用其重构风场时可以很好再现整体风场总特性[87]。由下文分析可知，对于脉动风场，第一阶模态的

贡献并不显著，常常需要考虑多阶模态的贡献。Tamura[114]对此进行了说明：一般而言，包含平均分量的整体风场会导致第一阶模态的贡献比例很大，比如可以达到 98%或 99%，并且第一阶模态几乎与风场的平均分量相同，这意味着包含平均分量的第一阶模态形状几乎与风场的平均分量分布相似。因此包含了平均分量的整体风场歪曲了真实的模态，很明显那样的模态不能帮助我们理解随机风场，应用在 POD 分析中的风场应该是减去平均值后的脉动风场。

### 3、其它性质

对于模态形状，和低阶模态相比，高阶模态是越来越复杂[123]。此外不同模态和不同物理现象之间往往有联系[91; 131]。

#### 2.2.2.3 主坐标函数求法及性质

##### 1、主坐标函数求法

当求出模态后，模态矩阵  $\Phi$  便组成一个多维正交线性空间，然后便可以提取出风场  $P$  在模态上的投影，即主坐标函数(以下简称主坐标)矩阵[113]：

$$c(t) = P\Phi \in R^{M \times K} \quad (2.12a)$$

其中的某一个主坐标为[113]：

$$c_i(t) = P\phi_i \in R^{M \times 1} (i=1, 2, \dots, K) \quad (2.12b)$$

式中， $c_i(t)$  列向量为一个时程，也叫模态时间函数[113]。

##### 2、主坐标性质

下面按风场类别分情况讨论主坐标的性质。

###### 1) 脉动风场中的主坐标性质

由(2.12a)得主坐标的均值表达式为：

$$E[c(t)] = E[P\Phi] = E[P]\Phi \in R^{1 \times K} \quad (2.13)$$

对于脉动风场有  $E[P] = [0]$ ，因而  $E[c(t)] = [0]$ ，这说明  $c(t)$  是一个零均值随机过程。

由式(2.12a)可得  $c(t)$  的协方差矩阵，见式(2.14)，该式也建立起风场协方差与主坐标协方差之间的关系。

$$C_c = \text{cov}(c(t)) = \Phi^T C_p \Phi = \Lambda \quad (2.14)$$

由前文可知，对于零均值随机过程，其方差矩阵  $V_c$ 、相关矩阵  $R_c$  和协方差矩阵  $C_c$  实际上是一致的，即有：

$$V_c = \text{var}[c(t)] = \text{diag}(V_{c,1}, V_{c,2}, \dots, V_{c,K}) = \Lambda \quad (2.15)$$



$$R_c = E[c(t), c(t)] = \frac{[c(t)]^T [c(t)]}{M} = \Lambda \quad (2.16)$$

在式(2.15)中,  $\text{var}[\cdot]$ 表示方差算子,  $V_{c_i} (i=1, 2, \dots, K)$ 表示  $c_i(t)$  的方差,  $\text{diag}(\cdot)$ 表示求对角矩阵, 下文相同。

在式(2.16)中,  $i$ 阶和  $j$ 阶主坐标的互相关系数为:

$$R(i, j) = E[c_i(t), c_j(t)] = \frac{\{c_i(t)\}^T \{c_j(t)\}}{M} = \lambda_i \delta_{ij} \quad (2.17)$$

式中,  $\delta_{ij}$ 表示 Kronecker delta 符号: 当  $i=j$  时,  $\delta_{ij}=1$ ,  $R(i, j)$ 为自相关系数, 也表示离散型随机过程中的任意一样本函数  $c_i(t)$  的均方值为  $E[c_i^2(t)] = \lambda_i$ , 还等于其方差; 否则  $\delta_{ij}=0$ ,  $R_{c_i, c_j} = 0$ 。

式(2.14)~式(2.17)都表明  $c(t)$  是线性无关的随机过程[126]。脉动风场主坐标的无关性意味着每阶模态在时间上是独立的[113]。

在振动理论中, 位移的均方值通常用来度量系统的振动能量[132]。笔者认为用均方值也可以作为其它随机变量或随机过程能量的度量单位。据此不难求出  $c(t)$  的均方值  $E[c^2(t)]$  来表示随机过程  $c(t)$  的总能量:

$$E[c^2(t)] = \sum_{i=1}^K (E[c_i^2(t)]) = \sum_{i=1}^K \lambda_i \quad (2.18)$$

式中,  $E[c_i^2(t)] = \lambda_i$ 反映了各阶主坐标的分布能量。

式(2.18)表明脉动风场的能量存在线性叠加的性质, 所有主坐标均方值之和等于所有本征值之和, 即等于  $c(t)$  的总能量, 这表明脉动风场的均方值可以作为能量的度量单位。

## 2) 整体风场中的主坐标性质

整体风场的  $E[P]$ 不为  $[0]$ , 由式(2.13)可知  $E[c(t)]$ 也不为  $[0]$ , 即  $E[c(t)]$ 中的元素不一定全为零, 所以整体风场的  $c(t)$  是一个非零均值随机过程。

由式(2.12a)和式(2.11a)可以得到  $c(t)$  的相关矩阵:

$$R_c = E[c(t), c(t)] = \Phi^T R_p \Phi = \Lambda \quad (2.19)$$

因为  $c(t)$  是一个非零均值随机过程, 所以  $c(t)$  的协方差矩阵  $C_c$  显然不等于  $\Lambda$ , 也不为对角阵, 表明由整体风场求得的  $c(t)$  是线性相关的随机过程, 虽然  $c(t)$  的相关矩阵为对角阵。同样利用式(2.15)中方差算子求得的  $c(t)$  的方差矩阵  $V_c$  也不等于本征值矩阵  $\Lambda$ 。

在用  $c(t)$  的均方值作为能量的度量单位时, 整体风场中  $c(t)$  的能量性质与脉动风场中  $c(t)$  的能量性质是一致的, 具体见式(2.18)。

### 2.2.2.4 风场重构及风场性质

在求出模态和主坐标之后，便可以用 POD 级数展开对原始风场  $P$  进行重构：

$$P = c(t)\Phi^T = \sum_{i=1}^K c_i(t)\phi_i^T = \sum_{i=1}^K P_i(t) \in R^{M \times N} \quad (2.20a)$$

$$P_i(t) = c_i(t)\phi_i^T \in R^{M \times N} \quad (2.20b)$$

式中， $P_i(t)$  表示第  $i$  阶子风场。

式(2.20)表明风场存在线性叠加原理，这样的处理方法与 Fourier 级数分解有相似之处[133]。在式(2.20)中，主坐标表征了时间特性，模态表征了空间特性，因而 POD 展开实际上是一种进行时空分离的分离变量法[88; 106; 112]。

在式(2.20a)中，可以取  $K$  项中的前一定数量  $K1$  ( $K1 < K$ ) 的低阶模态截断来给系统降阶，使得问题更进一步简化，在工程上一般是可行的，也是最有效的[20; 114]，风场重构时的降阶表示法  $P^r$  如下[20; 89; 123]：

$$P^r = \sum_{i=1}^{K1} c_i(t)\phi_i^T = \sum_{i=1}^{K1} P_i(t) \in R^{M \times N} \quad (2.21)$$

下面按风场类别分情况研究风场的性质：

#### 1、脉动风场

首先需要说明的是，因为  $E[c(t)] = [0]$ ，不难由式(2.13)的形式得知脉动风场的中每阶子风场也是一个零均值随机过程，具体来说每阶子风场中每个节点的风压时程的均值为零。

由式(2.16)、子风场表达式及协方差表达式可以求出任意两阶子风场  $P_i(t)$  和  $P_j(t)$  ( $i, j = 1, 2, \dots, K$ ) 之间的协方差矩阵  $C_{P_i, P_j}$  为：

$$\begin{aligned} C_{P_i, P_j} &= \text{cov}(P_i(t), P_j(t)) \\ &= \frac{[P_i(t)]^T [P_j(t)]}{M} - \{E[P_i(t)]\}^T \{E[P_j(t)]\} \\ &= \lambda_i \phi_i \phi_j^T \delta_{ij} \in R^{N \times N} \end{aligned} \quad (2.22)$$

式中，当  $i = j$  时， $\delta_{ij} = 1$ ， $C_{P_i, P_i} = \lambda_i \phi_i^2$ ，否则  $\delta_{ij} = 0$ ， $C_{P_i, P_j} = [0]$ 。式(2.22)表明不同阶子风场之间是线性无关的。

对于零均值的子风场，不难得知其相关矩阵  $R_{P_i, P_j} = C_{P_i, P_j}$ 。

在用均方值作为能量的度量单位时，同样可以得到子风场  $P_i(t)$  的总能量  $E[P_i^2(t)]$  以及原始脉动风场  $P$  的总能量  $E[P^2]$  为：

$$E[P_i^2(t)] = \text{sum} \left( \text{diag} \left( \frac{[c_i(t)\phi_i^T]^T [c_i(t)\phi_i^T]}{M} \right) \right) = \lambda_i \quad (2.23a)$$

$$E[P^2] = \sum_{i=1}^K (E[P_i^2(t)]) = \sum_{i=1}^K \lambda_i \quad (2.23b)$$

式中,  $\text{sum}(\cdot)$ 表示求和算子, 下文相同。

子风场  $P_i(t)$  的总方差  $V_{P_i(t)}$  以及原始脉动风场  $P$  的总方差  $V_P$  为:

$$V_{P_i(t)} = \text{sum}(\text{var}[P_i(t)]) = \lambda_i \quad (2.24a)$$

$$V_P = \text{sum}(V_{P_i(t)}) = \sum_{i=1}^K \lambda_i \quad (2.24b)$$

或

$$V_P = \text{sum} \left( \text{diag} \left( \frac{P^T P}{M} - \{E[P]\}^T \{E[P]\} \right) \right) \quad (2.24c)$$

式(2.24c)是利用原始风场求其总方差  $V_P$ , 式(2.24b)表明风场的方差也存在线性叠加的性质, 两式对脉动风场和整体风场均适用。此外, 由式(2.23)和式(2.24)可知在脉动风场中, 均方值能量和方差能量是一致的, 因而在脉动风场中用方差来进行能量的度量也是合适的。

## 2、整体风场

首先来研究每阶子风场的均值情况, 由前文可知, 在整体风场中,  $E[c(t)]$  中的元素不一定全为零, 所以得不出每阶子风场是一个零均值随机过程的结论, 也即并不是每阶子风场中每个节点的风压时程的均值为零。

任意两阶子风场  $P_i(t)$  和  $P_j(t)$  ( $i, j = 1, 2, \dots, K$ ) 之间的相关矩阵  $R_{P_i, P_j}$  为:

$$R_{P_i, P_j} = E[P_i(t), P_j(t)] = \frac{[P_i(t)]^T [P_j(t)]}{M} = \lambda_i \phi_i \phi_j^T \delta_{ij} \in R^{N \times N} \quad (2.25)$$

因为子风场并不都是零均值的随机场, 所以式(2.22)对整体风场的子风场并不一定完全成立, 也就是子风场的相关矩阵  $R_{P_i, P_j}$  不一定完全等于协方差矩阵  $C_{P_i, P_j}$ 。这表明虽然对原始风场  $P$  同样可以进行级数展开, 但不同阶子风场之间可能是线性相关的。

用均方值作为能量度量单位时, 可以得到子风场  $P_i(t)$  的总能量  $E[P_i^2(t)]$  以及风场  $P$  的总能量  $E[P^2]$  的表达式仍然为式(2.23)。

因为子风场  $P_i(t)$  不一定为零均值的随机场, 因而式(2.24)对整体风场可能是不成立的, 需要重新定义如下:

$$V_{P_i(t)} = \text{sum}(\text{var}[P_i(t)]) = \text{var}\{c_i(t)\} \quad (2.26a)$$

$$V_P = \text{sum}(V_{P_i(t)}) = \text{sum}(\text{var}\{c_i(t)\}) \quad (2.26b)$$

在此处需要强调的是，如果对 2.2.2.3 小节和 2.2.2.4 小节内容进行对比分析，可以发现：两种风场中，主坐标的能量性质和均值与相应风场的能量性质和均值是完全一致的，由于风场比主坐标复杂，因而通过主坐标能量性质和均值的研究便可以很好了解风场相关内容，可以不再对风场进行研究。

### 2.2.2.5 本征值性质

由前文分析可知，本征值扮演着一个重要的角色。为了使降阶风场  $P'$  能够充分地接近原始风场，和原始风场相关较好的  $K1$  个模态必须要选出来。POD 基模态和原始风场之间的相关性常借助本征值来表示，本征值越大，相应模态与原始风场  $P$  之间的相关性就越大[133]。

如果需要对模态的贡献进行具体量化，则适合风场重建的模态数能用式(2.27)的比值  $r_i$  和式(2.28)的到  $K1$  阶模态累积比值  $r_{K1}$  进行判断[114]:

$$r_i = \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^K \lambda_i} (i=1, 2, \dots, K) \quad (2.27)$$

$$r_{K1} = \sum_{i=1}^{K1} r_i = \frac{\sum_{i=1}^{K1} \lambda_i}{\sum_{i=1}^K \lambda_i} \quad (2.28)$$

式(2.27)也叫标准化本征值[89; 92]，反应的是总能量在每阶模态中的相对百分率，因而也叫相对能量[104]。笔者认为式(2-27)还可以叫做模态的贡献系数或参与系数，式(2-28)相应地可以叫做累计贡献系数或累计参与系数。

文献[133]定义第  $k$  阶相关水平  $P_k$ ，以此来确定模态的贡献作用：

$$P_k = \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i}{\sum_{i=1}^K \lambda_i} (k=1, 2, \dots, K) \quad (2.29)$$

式(2.29)动态反映了模态的贡献，可用来决定模态的截断程度。当  $P_k = 0.99$  或更高时，截断的模态数  $K1$  就满足了[104; 134]。

由本征值的正定性可知：

$$0 < P_1 < P_2 < \dots < P_K = 1 \quad (2.30)$$

根据式(2.21)重构后的风场和原始风场之间存在一定的误差，其误差为[20; 114]:

$$E = 1 - r_{K1} = \sum_{i=K1+1}^K \lambda_i \quad (2.31)$$

## 2.3 本征正交分解法的工程应用

### 2.3.1 工程概况及结构概况

某电厂干煤棚为落地三心圆柱面双层网壳结构，纵向长度B为140m，径向跨度L为103m，高H为40m，如图2.1所示。该结构位于强台风区，基本风压(50年重现期)达0.80Kpa。该结构为一个三维空间桁架结构，其杆件为弹性杆件。结构非约束节点数为2450个，该结构的自由度为7350。

### 2.3.2 风洞试验

#### 2.3.2.1 试验设备及测量系统

干煤棚模型风洞试验是在同济大学土木工程防灾国家重点实验室风洞试验室的TJ-2大气边界层风洞中进行的。风洞试验段高2.5m，宽3.0m，长15m，风速为0.5-60m/s连续可调。

压力测量和数据采集系统采用美国Scanivalve公司的64通道DSM3000电子压力扫描阀，采样频率约为312.5Hz，每个测点采样样本总长度为6000个数据，对应的采样时间是19.2s。

#### 2.3.2.2 试验概况

试验模型为刚体模型，用有机玻璃板制成，具有足够的强度和刚度，在试验风速下不发生变形，并且不出现明显的振动现象，以保证压力测量的精度。考虑到实际建筑物的情况，选择模型的几何缩尺比为1/150。风洞测压试验的参考点风速为12m/s。试验模型及风向角规定如图2.2所示，干煤棚方位及风向角定义如图2.3所示。具体的风洞试验工况在文献[135]中均有详细介绍，这里不再赘述。

结构模型风洞试验的测点共计215个，呈双轴对称分布，其具体布置见图2.4。由于模型内外表面同时受风，每个测点位置需布置1对测点，每对测点包括内、外表面两个测压孔，以同步测量该点处内外表面的压力，而该测点最终的风荷载为外、内表面压力之差。

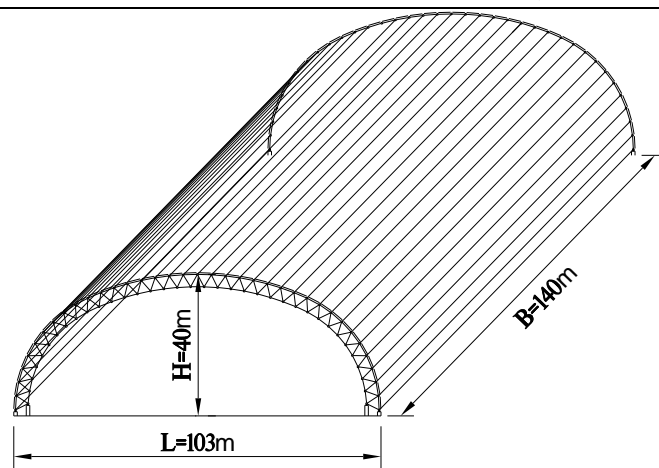


图 2.1 干燥棚结构示意图

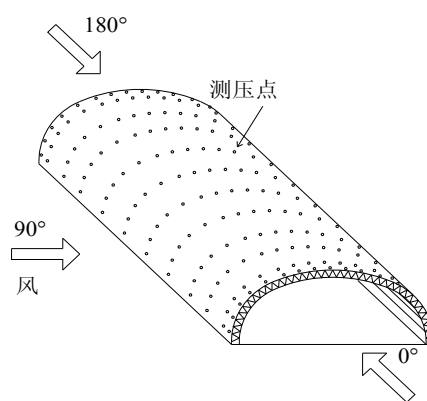


图 2.2 干燥棚风洞试验模型及风向角规定

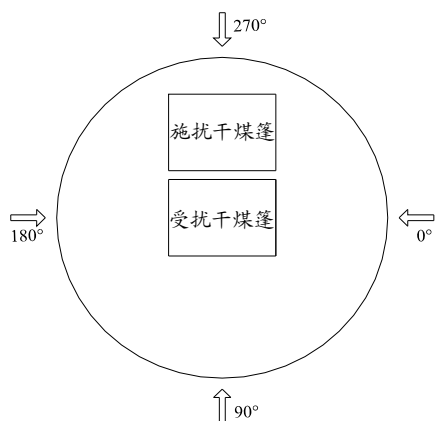


图 2.3 干燥棚方位及风向角

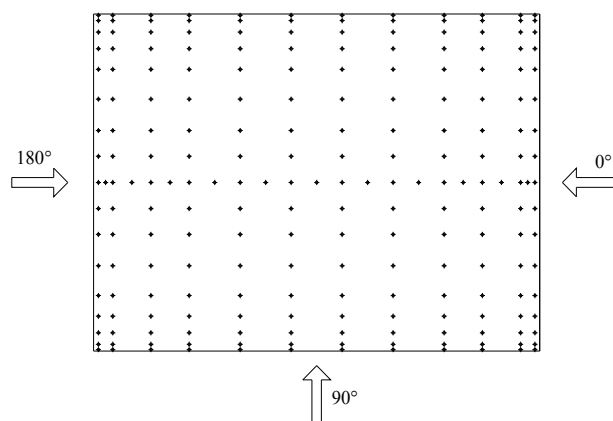


图 2.4 干燥棚测压点布置俯视图

### 2.3.3 本征正交分解法的应用

文献[135]对有施扰干燥棚和没有施扰干燥棚的情况都进行了研究。限于篇幅，本章以 90 度风向角且无施扰干燥棚的 B 类风场的风洞试验结果，对受扰干燥棚进行 POD 的研究，此时的干燥棚方位及风向角见图 2.5。由于结构对称，由图 2.4 可知，理论上结构左边部分的风压和结构右边部分的风压以中轴线为对称

轴而完全对称。因此进行风洞试验时，可只测量半边结果，根据对称性可以得到另外一半的结果，所以此种情况下，独立测压孔数目为 108 个。

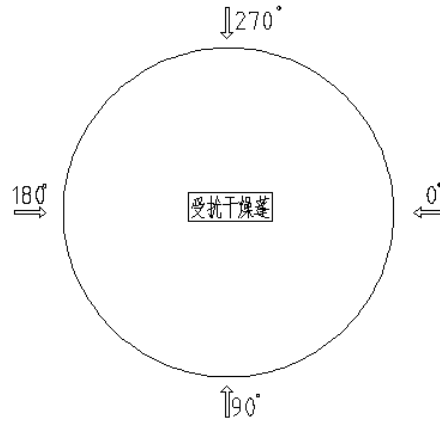


图 2.5 受扰干燥棚方位及风向角

在本章下文进行 POD 分析时，将直接根据风洞试验结果所得的风压系数进行分析。

### 2.3.3.1 本征值

由前文可知，本征值是 POD 方法中一个比较重要的参数，它是能量的一个比较直接的度量单位，本章对此首先进行研究。

#### 1、本征值的总个数

由于篇幅限制，本章中只列出两种风场本征值的部分结果进行分析，见表 2.1。

表 2.1 风场本征值及贡献

| 模态阶数 $i$ | 脉动风场本征值 |   |           | 整体风场本征值 |   |           |
|----------|---------|---|-----------|---------|---|-----------|
|          | 本征值     | $\frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{108} \lambda_i} (\%)$ | 累积百分比 (%) | 本征值     | $\frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{108} \lambda_i} (\%)$ | 累积百分比 (%) |
| 1        | 0.1348  | 14.46   | 14.46     | 9.8444  | 91.97   | 91.97     |
| 2        | 0.1061  | 11.37   | 25.83     | 0.1262  | 1.18  | 93.15     |
| 3        | 0.0727  | 7.80  | 33.63     | 0.0941  | 0.88  | 94.03     |
| 4        | 0.0532  | 5.70  | 39.39     | 0.0639  | 0.60  | 94.63     |
| 5        | 0.0407  | 4.36  | 43.69     | 0.0425  | 0.40  | 95.02     |
| 6        | 0.0313  | 3.36  | 47.05     | 0.0324  | 0.30  | 95.33     |
| 7        | 0.0258  | 2.77  | 49.82     | 0.0279  | 0.26  | 95.59     |
| 8        | 0.0236  | 2.53  | 52.35     | 0.0256  | 0.24  | 95.83     |
| 9        | 0.0202  | 2.16  | 54.51     | 0.0204  | 0.19  | 96.02     |

续前表

|     |            |           |        |            |           |        |
|-----|------------|-----------|--------|------------|-----------|--------|
| 10  | 0.0200     | 2.14      | 56.65  | 0.0202     | 0.19      | 96.20  |
| ⋮   | ⋮          | ⋮         | ⋮      | ⋮          | ⋮         | ⋮      |
| 108 | 2.1039e-4  | 2.2561e-2 | 100.00 | 2.1041e-4  | 1.9657e-3 | 100.00 |
| 109 | 1.8743e-17 |           |        | 5.2185e-16 |           |        |

由表 2.1 可以看出, 模态阶数为 108 阶时, 本征值还相对较大, 而到了 109 阶时, 本征值几乎为零, 由前文本征值的递减排序方法可知后面的本征值将会更小。这是由于试验时独立测压孔数目为 108 个, 虽然试验的测点有 215 个, 如果仅从数学含义上按照式(2.7)或(2.8)可以得到 216 个本征值和模态, 且不同模态之间的数据差异不大, 但是对风场进行 POD 分析时, 其本征值的个数以及相应模态的个数还是应该等于独立测压孔数目, 所以本章下文中本征值和模态的总个数都为 108。

## 2、本征值特性

在脉动风场中, 大跨屋盖结构常常由于前缘分离以及可能存在再附现象, 屋盖表面风压各点相关性较弱, 因此往往前几阶本征值(尤其是第一阶本征值)所占比例的优势并不明显, 而且前几阶本征值相互之间所占比重的差异也不是很大, 前几阶模态起不了决定性的作用, 中高阶模态的贡献不能随便忽略。这个特征由表 2.1 中标准化本征值  $\lambda_i / \sum \lambda_i (\%)$  一栏中明确地看出, 因而对于本算例在对脉动风场进行 POD 风场重构时, 显然仅仅考虑第一阶模态显然是不够的和不正确的, 需要考虑多阶甚至中高阶模态的影响。如果按照文献[104; 134]的规定, 本章中脉动风场重构的模态阶数需要取到 89 阶。

在表 2.1 中, 整体风场的第一阶标准化本征值远远大于其它阶标准化本征值, 因而第一阶模态的贡献非常显著, 起着决定性的作用, 余下的模态几乎完全可以忽略, 该特点与文献[87; 88; 89; 93]所研究的整体风场本征值贡献特征几乎完全相同: 第一阶本征值超过了余下本征值大约两个数量级的幅度。因而笔者认为对整体风场进行 POD 分析时, 这个特点也会过分突出第一阶模态在风场中的作用, 从下文对其它参数的分析中也可以看出。

在对结构进行风洞试验时, 由于受到设备条件的限制, 独立测点数往往大大小于结构自由度的个数, 模态的个数不会很大。笔者建议在计算机内存和计算速度不是主要问题的今天, 对风场重构尤其是脉动风场的重构应该尽可能考虑高阶模态的影响, 虽然 POD 的优势在于进行模态截断给系统降阶。

### 2.3.3.2 主坐标

由前文可知, 某种程度上主坐标性质等价于风场性质, 由于风场性质比主坐



标性质复杂，因而可以通过主坐标的研究来间接地研究风场。前文中已经谈到两种风场中不同主坐标之间的关系，在本工程中很容易得到验证，在此不予阐述，本章只是讨论主坐标的某些重要性质。

### 1、主坐标时程

用式(2.12)求出了两种风场中部分主坐标时程，见图 2.6 和图 2.7，图中时间步长为  $19.2/6000 = 0.0032\text{s}$ 。

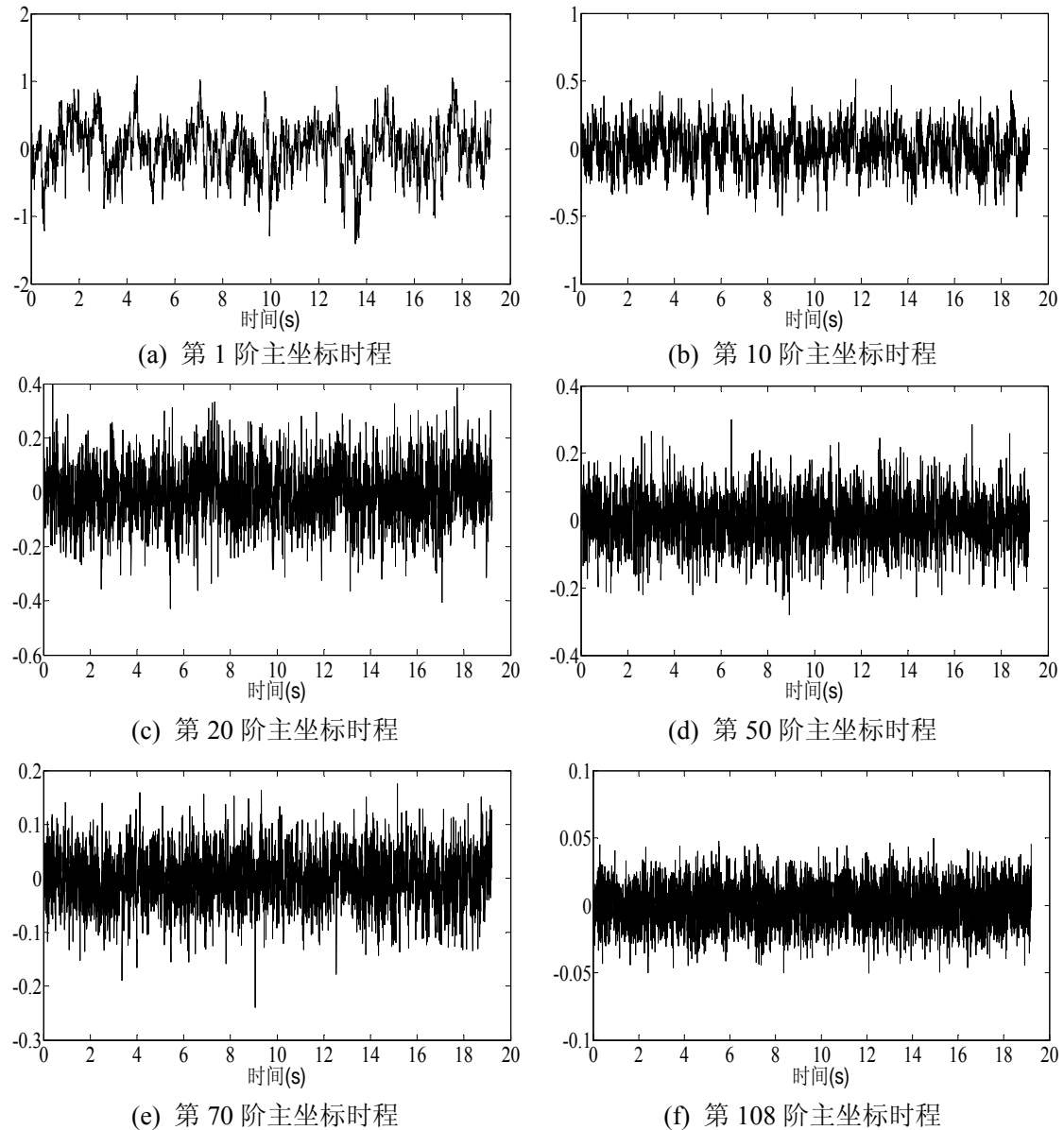


图 2.6 脉动风场部分主坐标

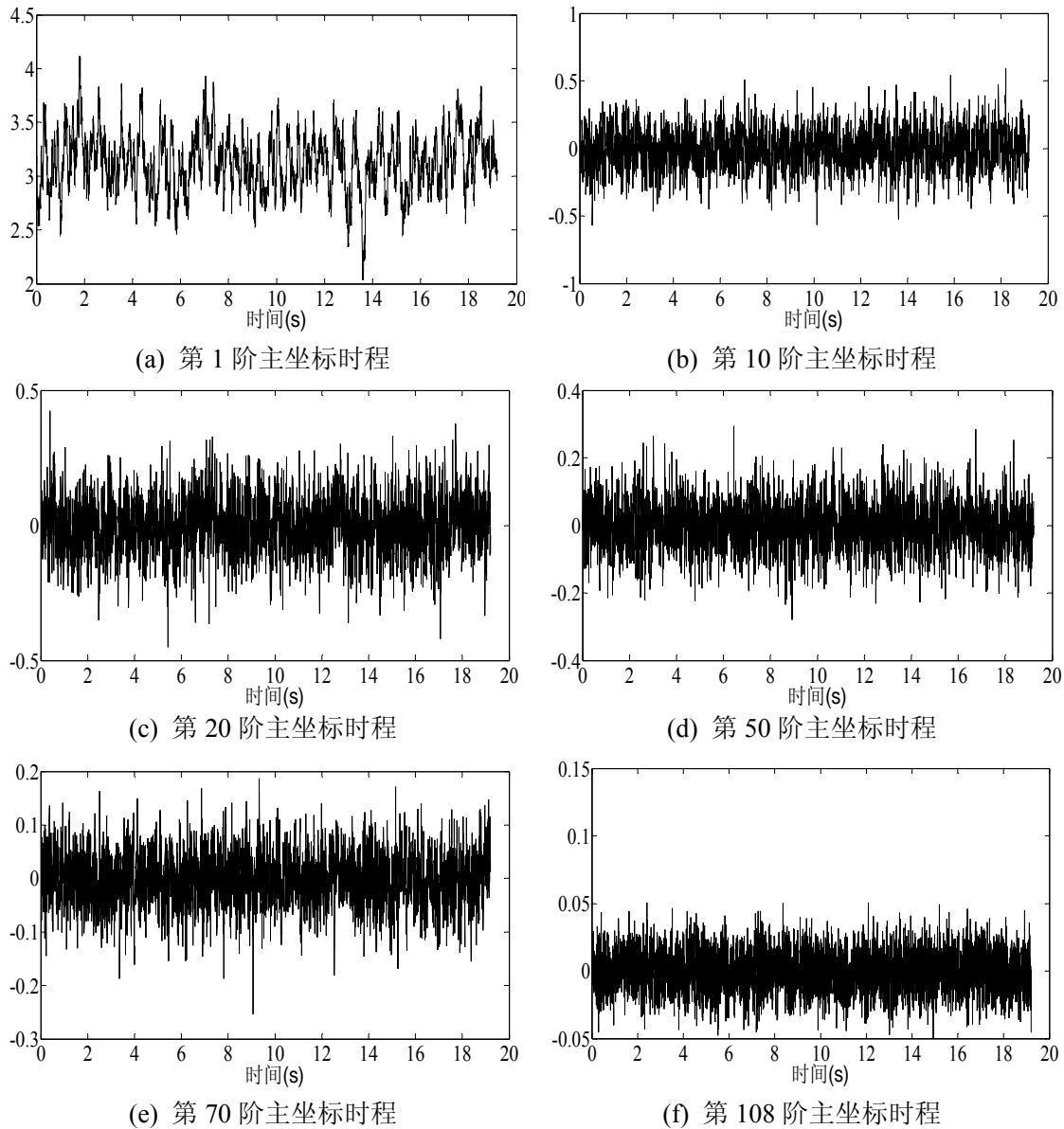


图 2.7 整体风场部分主坐标

由图 2.6 和图 2.7 可知，两种风场中的每阶主坐标时程围绕均值上下波动，表现出随机的特性，这与文献[87; 112]所得出的结论是一致的。

## 2、主坐标的均值、均方值和方差

在随机振动领域中，一个随机函数  $x(t)$  的均值  $E[x(t)]$ 、均方值  $E[x^2(t)]$  和方差  $V[x(t)]$  是三个重要的数字特征参数，它们之间的关系是：

$$V[x(t)] = E[x^2(t)] - (E[x(t)])^2 \quad (2.32)$$

本章首先给出两种风场的每阶主坐标的均值，见图 2.8 和图 2.9。

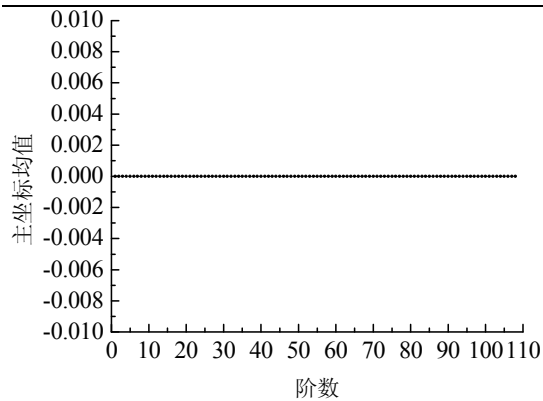


图 2.8 脉动风场每阶主坐标的均值

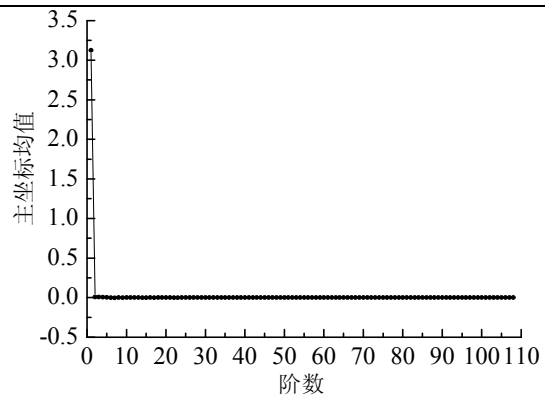


图 2.9 整体风场每阶主坐标的均值

由图 2.8 可知, 脉动风场中每阶主坐标的均值为零, 因而每阶子风场是一个零均值的随机过程。

由图 2.9 可知, 在整体风场中, 第一阶主坐标的均值非常大, 而其它阶主坐标函数的均值很小, 趋近于零, 因此主坐标矩阵的非零均值特点主要体现在第一阶主坐标上。对应于风场, 第一阶子风场的均值很大, 其它阶子风场的均值相比很小, 趋近于零, 第一阶子风场几乎提供了整体风场全部的均值, 其它子风场几乎不提供整体风场的均值。

在式(2.32)中, 如果用方差、均方值和  $(E[x(t)])^2$  来分别反映随机变量或随机场的波动能量、总能量和均值能量, 那么在脉动风场中, 每阶主坐标均方值等于方差, 表明脉动风场中只有波动能量, 不存在均值能量。此外主坐标均方值和方差均等于相应的本征值, 如果本征值是能量或参与模态度量的直接指标, 那么主坐标的均方值或方差均可以作为间接指标, 据此也可以判断出在脉动风场中运用 POD 时考虑多阶模态或多个子风场的必要性。

在整体风场中, 由主坐标均值特点可知第一阶子风场几乎提供了整体风场全部的均值能量, 其它子风场几乎不提供整体风场的均值能量。对于总能量, 整体风场的主坐标均方值等于本征值, 根据表 2.1 相关数据可知第一阶子风场几乎提供了风场全部的总能量, 其余阶子风场提供的总能量可以忽略不计。对于方差, 根据表 2.1、图 2.9 和式(2.32)不难得知, 第一阶主坐标均方值远远大于第一阶方差, 其余阶主坐标的均方值几乎等于方差, 不过所有阶主坐标方差之间的数值大小差异不是十分明显, 表明所有阶子风场对整体风场的波动能量贡献的差异也不十分明显, 进而推知所有阶子风场对整体风场中的脉动分量(即脉动风场)贡献的差异也不十分明显, 因而需要考虑多阶子风场对脉动分量的作用, 以便为了更加准确地描述风场。

在上面, 通过主坐标能量对相应风场进行分析研究, 笔者认为判断子风场(或模态)的贡献作用最好从均方值和方差两个方面进行综合评价, 单从一个方面着

手的话,容易片面突出风场中某些方面的量而忽视其它方面的量。比如在整体风场中,仅从均方值(即本征值)来考虑子风场的话,容易大大突出第一阶子风场(或模态)的贡献作用,因而也就过分强调该风场的平均分量而轻视了其脉动分量。

### 3、主坐标的功率谱密度

功率谱密度是一种概率统计方法,是随机振动频域理论中的有效工具之一。每一阶模态的功率谱密度(即模态压力谱)能够从主坐标中分析得到,以便更精确、更可靠地研究主坐标的特性[113]。

下面来研究子风场功率谱密度和主坐标功率谱密度之间的关系。由式(2.20b)可知,第*i*阶子风场中结构第*j*节点上的风荷载时程列向量为:

$$\{P_{j,i}(t)\} = \{c_i(t)\} \phi(j,i) \in R^{M \times 1} \quad (2.33)$$

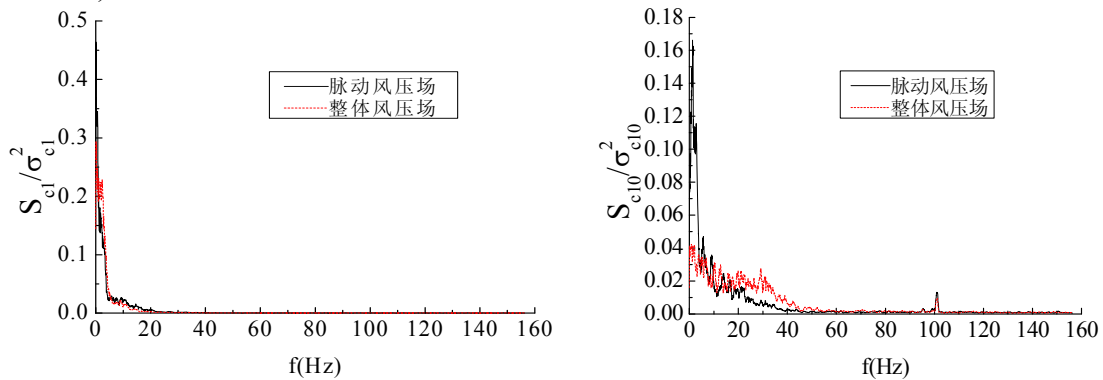
式中,  $\phi(j,i)$  表示第*i*模态列向量  $\phi_i$  中第*j*节点的模态值。

根据式(2.33),可得第*i*阶子风场中结构第*j*节点上的风荷载功率谱密度  $S_{P_{j,i}}$  和第*i*阶主坐标功率谱密度  $S_{c_i}$  之间的关系为:

$$S_{P_{j,i}} = (\phi(j,i))^2 S_{c_i} \quad (2.34)$$

式(2.34)表明,同阶子风场功率谱密度和主坐标功率谱密度之间的关系就是一个倍数关系,所以由主坐标功率谱密度便很方便地求出相应子风场的功率谱密度,这大大地简化了计算工作量,也进一步说明风场性质与主坐标性质的等价性。

本章对两种风场中部分阶数主坐标的标准化功率谱密度(笔者注:标准化功率谱密度指的是纵坐标为谱密度值/方差(或谱密度值/均方根的平方)的功率谱密度,第4章中的时程响应的功率谱密度也为标准化后的功率谱密度,后文中不予赘述。)进行了对比分析,见图2.10。



(a) 第1阶主坐标功率谱密度

(b) 第10阶主坐标功率谱密度

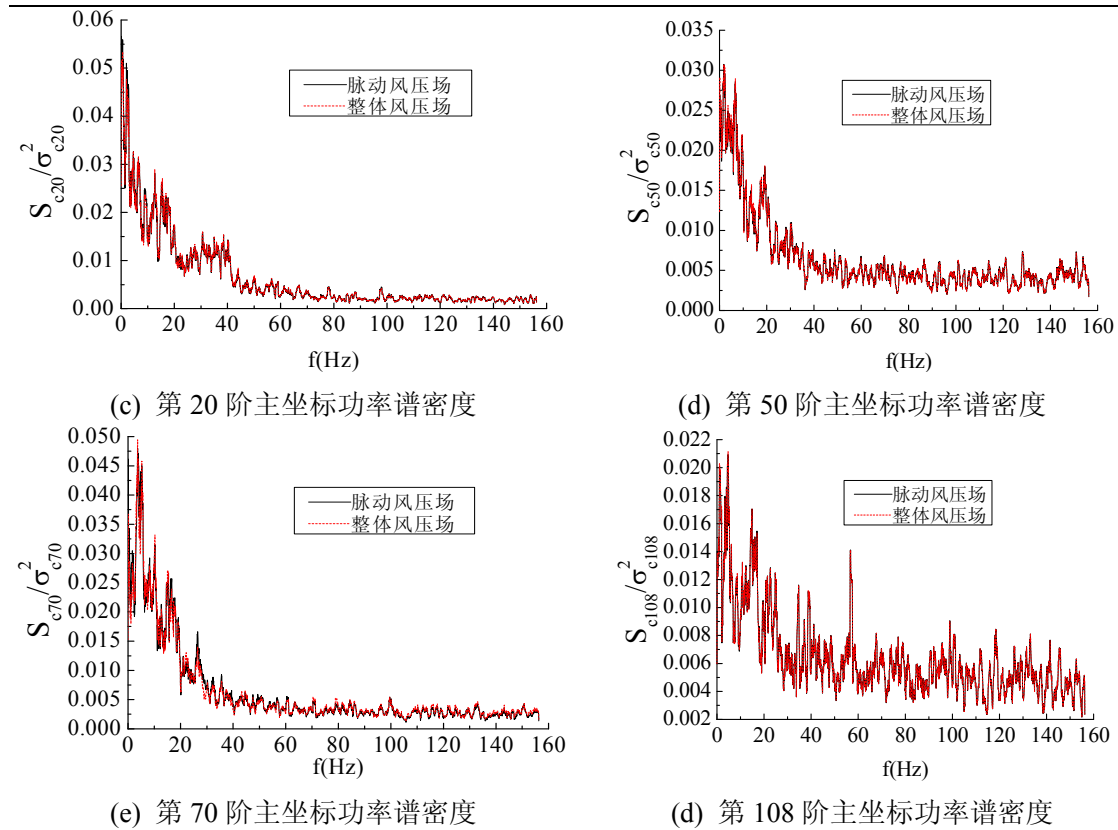


图 2.10 脉动风场和整体风场部分主坐标的标准化功率谱密度

由图 2.10 可知，随着阶数的增加，两种风场中主坐标的能量都是由集中逐渐分散开去，主坐标所含频率成分越多，反映到风场中时，表明子风场的成分越来越复杂。而且随着模态阶数的增加，两种风场主坐标的功率谱密度差异逐渐减小，最后基本达到一致，这表明两种风场的子风场之间的差异也可能越来越小。

### 2.3.3.3 本征模态

前文已经主要对与能量有关的参数进行分析，在 POD 分解中，本征模态又是一个非常重要的参数。它可以表征不同的物理现象，尤其是低阶模态可以表征一些特殊的物理现象，一些文献[86; 113; 123; 136]对此进行了研究，本章也同样试图对模态所表征的物理现象进行分析。本节需要探究不同向量之间的差异，为此需要建立误差标准进行量化。由于后面的章节中将会多次使用误差判别，因而在这里进行详细说明。

#### 1、误差判别标准

对于两组非零向量  $\{X\}$  和  $\{Y\}$ ，为判别其误差，可以对向量的每一个元素计算相对误差以判断该元素的误差大小，但这无法从整体上反映其误差，而且也不能给人以直观的感受。为解决这个问题，本章根据向量的长度，向量之间的夹角，以及两向量的标准差来定义向量之间的误差，可以比较全面的分析其误差。

在欧氏空间中，向量 $\{X\}$ 的长度(也叫二范数)定义[130]为：

$$\|\{X\}\|_2 = \sqrt{\{X\}^T \{X\}} \quad (2.35)$$

非零向量 $\{X\}$ 和 $\{Y\}$ 的夹角定义[130]为：

$$\theta = \arccos \left( \frac{\{X\}^T \{Y\}}{\|\{X\}\|_2 \|\{Y\}\|_2} \right) \quad (2.36)$$

式(2.36)可以作为衡量空间分布形状误差的一个指标，其单位为  $rad$ ，如果  $\theta$  较大，显然这两个向量空间分布形状之间的差异较大；如果  $\theta = 0$ ，表明这两个向量空间形状是相同的，但是这两个向量可能并不相等，为此再定义非零向量 $\{X\}$ 和 $\{Y\}$ 的长度比：

$$\lambda = \frac{\|\{X\}\|_2}{\|\{Y\}\|_2} \quad (2.37)$$

和相对误差[130]：

$$e = \frac{\|\{X\} - \{Y\}\|_2}{\|\{Y\}\|_2} \quad (2.38)$$

如果  $\theta = 0$ ，且  $\lambda = 1$  或  $e = 0$ ，表明这两个向量是相同的。

## 2、本征模态分析

对全部本征模态的机理进行解释是不现实的，而对前少数本征模态进行确切的解释是比较切合实际的[113]。

整体风场的平均风压系数与时间没有关系，它也可表征风场的空间分布特性，与模态有着相似的作用。由前文分析可知整体风场中第一阶模态占据着绝对地位，此小节首先进一步研究整体风场的本征模态与其平均风压系数之间的关系。为了定性分析二者之间的关系，本章在此给出结构上表面法向整体风场标准化平均风压系数图及部分本征模态图，分别见图 2.11 和图 2.12。图 2.11 中的标准化指的是对平均风压系数列向量除以其向量模，标准化平均风压系数便是单位向量，以便和单位本征模态进行比较。同时为了定量分析整体风场中的平均风荷载与各阶本征模态之间的差异，根据式(2.36)和式(2.38)，本章中给出了标准化平均风荷载与各阶模态之间的夹角和相对误差，见图 2.13 和图 2.14，计算时非零向量 $\{X\}$ 和 $\{Y\}$ 分别表示本征模态和标准化平均风压系数。

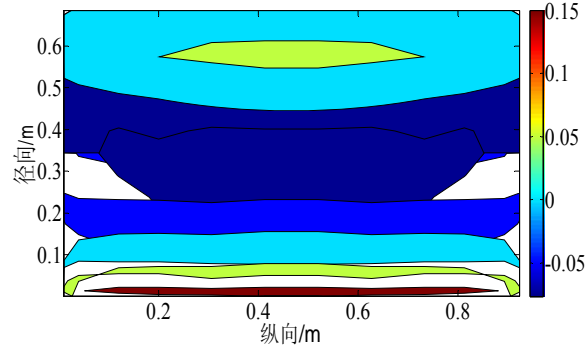


图 2.11 整体风场的标准化平均风压系数图

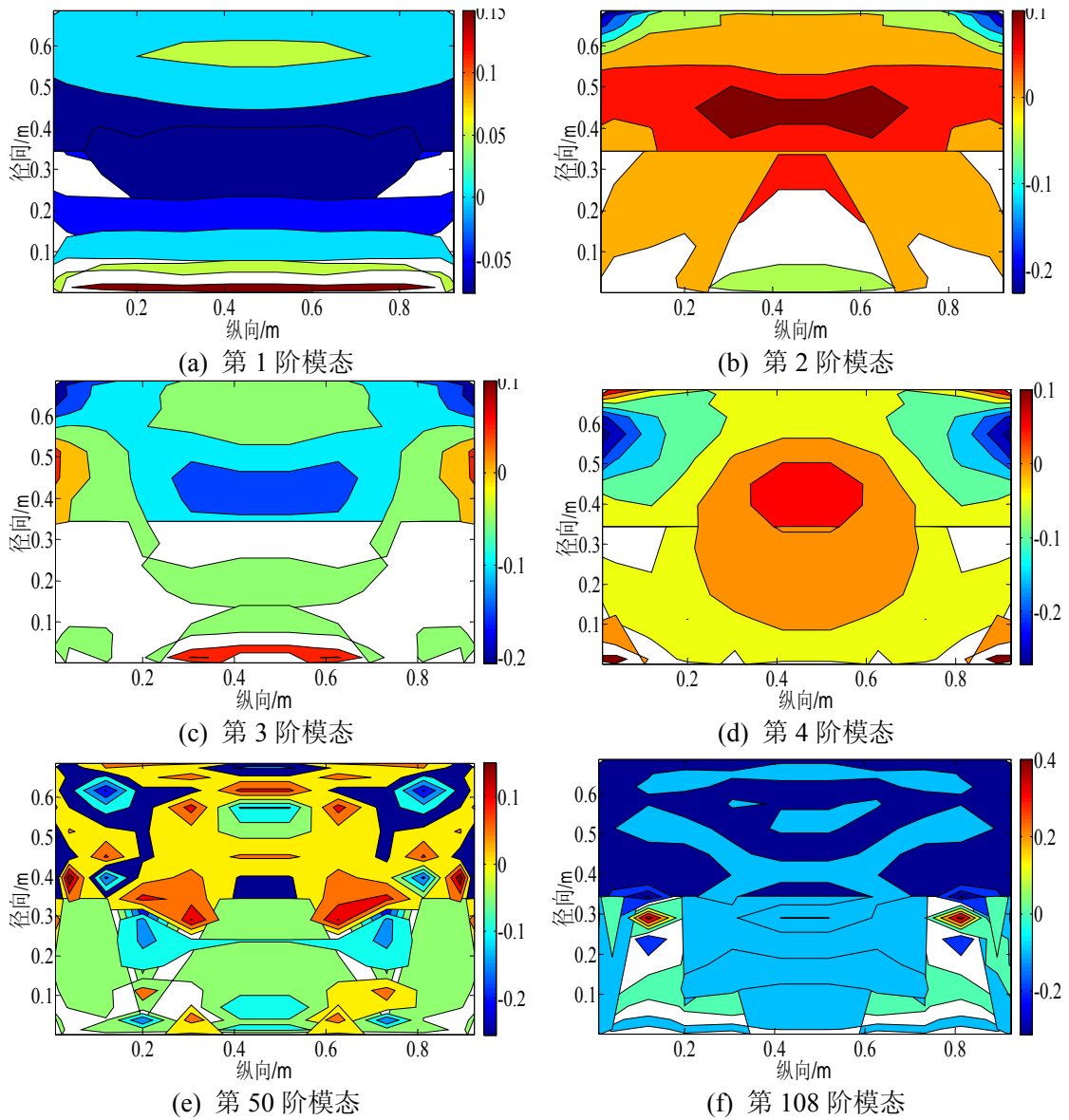


图 2.12 整体风场部分阶数本征模态图

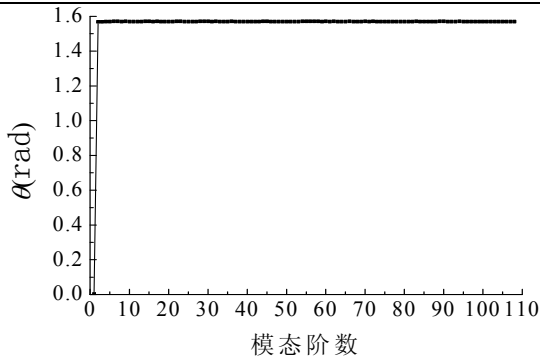


图 2.13 整体风场标准化平均风压系数与各阶模态之间的夹角

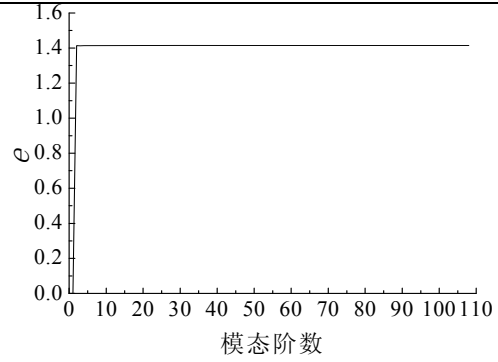


图 2.14 整体风场标准化平均风压系数与各阶模态之间的相对误差

由图 2.11~图 2.14 可知，无论定性分析还是定量分析，都表明整体风场中的平均风压系数和第 1 阶本征模态在空间分布形状上甚为相似，二者之间有着最高的相关性，这与文献[86; 87; 92; 114]所得出的结论是一致的，而其它阶本征模态的空间分布形状与平均风压系数的空间分布形状相差甚远。要想用某一阶本征模态来近似表示平均风压系数，显然第一阶才最有可能。

为了对脉动风场的本征模态进行分析，本章在此也给出了结构上表面法向脉动风压系数标准化均方根分布图及其结构上部分本征模态图，分别见图 2.15 和图 2.16。图 2.15 中的标准化指的是脉动风压系数的均方根列向量除以其向量模。

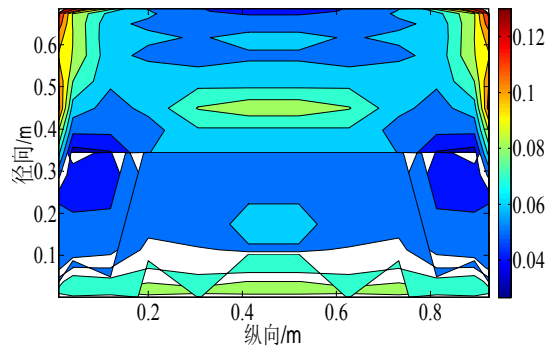
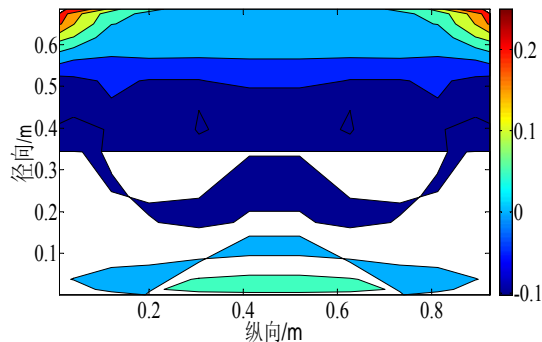
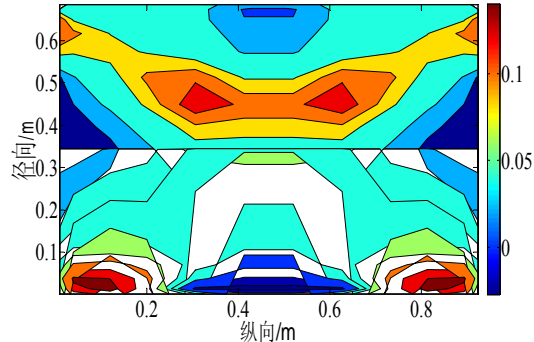


图 2.15 脉动风场的标准化均方根荷载分布图



(a) 第 1 阶模态



(b) 第 2 阶模态



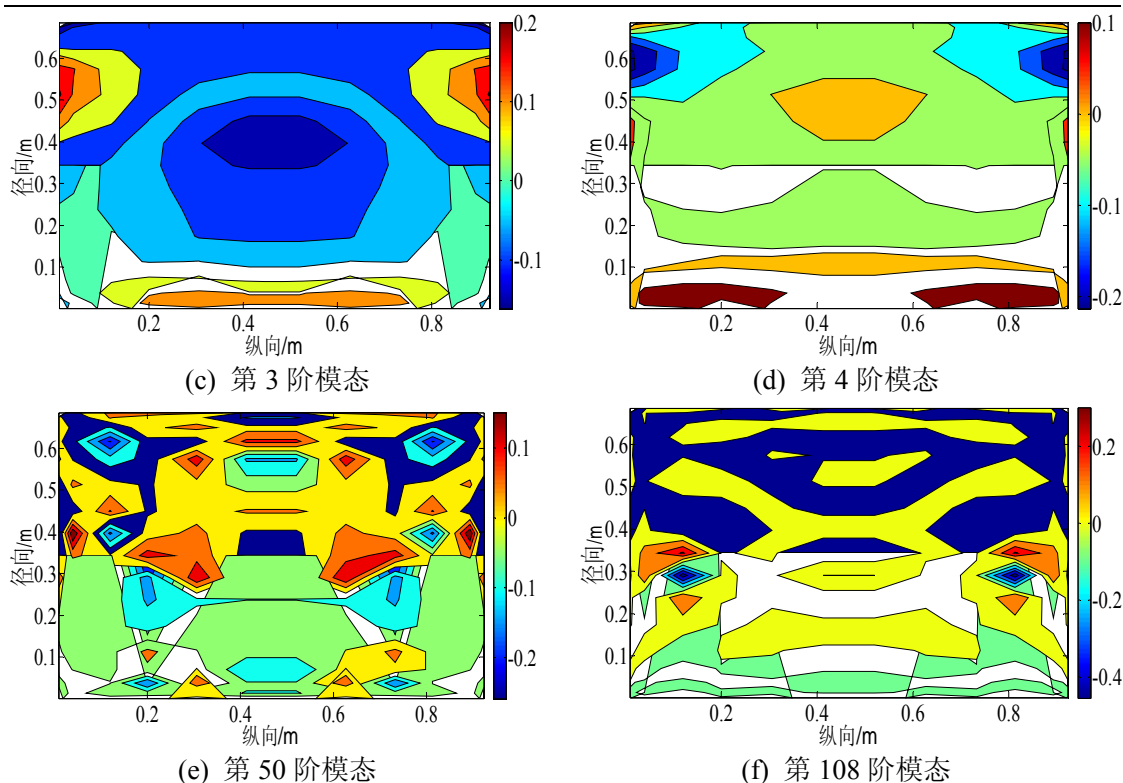


图 2.16 结构上表面法向脉动风场本征模态图

由图 2.15 和图 2.16 可知，因为对脉动风压系数的时程求了均方根，所以标准化均方根风压系数与本征模态之间没有直接联系，二者之间差异较大。

由图 2.12 和图 2.16 对比分析可知，模态阶数较高时，两种风场的本征模态形状差异较小。由该特点和整体风场本征模态及主坐标的特点可知，整体风场的平均分量主要靠第一阶模态提供，但是其脉动风荷载部分需要考虑多阶模态。

通过对前文的分析可知，利用 POD 分解对风场进行分析时，主坐标描述了风场随时间变化的特点，是一个动态的概念，本征模态反映了风场的空间分布，是一个静止的概念，两者最好结合起来对风场进行研究，不能只依赖其中一个。

## 2.4 本章小结

本章主要对 POD 技术中的 CPT 基本理论进行比较详细的阐述，并结合工程实际对两种不同风场的 CPT 进行对比分析，为后续章节奠定了坚实的基础。概括起来得到了如下结论：

- 1) CPT 技术有助于对复杂时空变化的随机风场理解，采用新的坐标系从不同的角度描述风场，表明 CPT 技术是分析随机风场的有效手段。
- 2) 整体风场第一阶模态在风场中的贡献非常显著，往往只需考虑第一阶模态的影响，从而会过分强调和依赖于第一阶模态的作用。而脉动风场的第一阶模态在风场中的贡献并不显著，常常需要考虑多阶模态甚至中高

阶模态的影响。

- 3) 考虑风场模态的贡献时和研究复杂风场的性质时，建议不要仅仅局限于本征值，可以综合其它相关参数(主坐标性质等)一起分析，有助于正确理解应用于CPT分析中的风场。

## 第3章 大跨度屋盖几何非线性问题的基础理论

### 3.1 引言

悬索屋盖是大跨度屋盖结构中一种常见的结构形式，它有着相当大的建筑、结构和经济潜能，能产生很好的美学形状，具有良好的艺术效果[51; 137]。不过悬索屋盖通常较轻，这使得它先天对地震作用有较好的适应性和抵抗能力，但对风荷载却非常敏感，风荷载往往是这类结构设计中的主导活荷载[35; 40; 45; 50; 138]，因此结构的风致响应分析显得尤为必要。此外悬索屋盖的初始几何形状在设计之初通常是不知道的，需要通过一个名叫找形的过程来完成。无论是风致响应还是结构找形，已有研究[35; 36; 37; 40; 50; 51; 138; 139; 140; 141]均表明悬索屋盖常常表现出较强的几何非线性特征。在悬索屋盖中，预应力鞍形索网屋盖是一种常见的结构形式，它具有较好的稳定性、明确的传力途径和必要的刚度。限于篇幅，本章将以预应力鞍形索网屋盖为例对大跨度屋盖的几何非线性问题的基础理论进行研究，进而为第4章大跨度屋盖几何非线性问题的应用研究奠定坚实的理论基础。

索网屋盖的几何非线性计算方法有连续化理论和离散理论两种类型[138]：前者是将索的截面沿曲面匀开，将索网看作薄膜进行计算，因而也叫“薄膜理论”，该方法实际上是一种解析方法，是许多实用算法的基础；后者以节点位移作为基本未知量、以节点之间的索段作为计算单元，离散理论是一种基于有限元理论的数值方法，它是计算机解法的基础。连续化理论只能考虑小垂度问题，而且主要讨论仅有竖向荷载作用的情形；此外建立方程后直接求解方程并非易事，实际上常不得不求助于各种近似解法[138]，这使得连续化理论的可靠性和实用性大大降低。薄膜的精确分析在数学上是极为复杂的，而简化分析法又有自身的局限性，或许正因为如此，在可用于索系的薄膜精确非线性分析方面的研究很少[142]。文献[143]进一步认为利用解析方法求解张拉索——膜结构非常困难，此时以有限元为代表的数值方法就成为唯一的普适方法。因此本文只对离散理论进行必要的阐述。

本章首先简要地阐述了经典的几何非线性有限元理论，为预应力鞍形索网屋盖的几何非线性理论奠定基础。其次有针对性地、系统地推导了预应力鞍形索网屋盖的几何非线性有限元理论。

本章的主要创新点在于：初应力刚度矩阵是索网屋盖非线性计算过程中一个非常重要的参数，本章采用新的叠加方法对该矩阵进行了推导，并推导出整体坐标系下初应力刚度矩阵的新形式。

## 3.2 几何非线性有限元理论的简介

几何非线性问题的共同特点是结构的变形造成了结构力学状态的显著变化,它可以分成大位移(大转动)小应变问题、大位移(大转角)大应变问题和结构的变形引起外荷载大小、方向和边界支承条件的变化等问题[144; 145]。一般工程结构所遇到的非线性问题常常属于大位移(大转动)小应变问题,本章仅对这类问题进行必要的阐述,文献[144; 146; 147; 148; 149; 150; 151]等则对几何非线性有限元理论进行了系统的介绍。

### 3.2.1 静力学中几何非线性问题的表达格式及其求解

对于大变形的固体,可以根据变形固体上一个微元体中内部和边界上的力的平衡条件列出微分形式的平衡方程[144; 146; 147; 148; 152]。不过在进行结构的分析时,另一种表示物体平衡的有限元方法由于简单、通用而且具有良好的数值性质,往往占据着主导地位并得到广泛的应用,几乎所有主要的通用分析程序都是根据该方法编写的[137; 144; 146; 153]。在有限元问题分析中,有限元法常常采用虚功方程(即虚位移原理)来建立物体的平衡方程。虚功方程是具有积分形式的、弱形式的平衡条件[147; 148; 150; 154],因为在方程中存在变分,文献[144; 146; 148]又称虚功方程为变分形式的平衡条件方程,它是建立有限元法的基础[43; 144; 146; 147],它对于任何的几何非线性问题总是成立的[145]。而且虚功方程对高阶自由度的互连体系尤其重要[132],而预应力鞍形悬索屋盖便属于这种体系,因此本章将对非线性体系的虚功方程进行必要介绍。

在几何非线性问题的有限元法中,通常采用增量分析的方法,增量求解是目前数值分析中的最佳手段[155]。增量求解的典型格式有 TL 格式(Total Lagrange Formulation)和 UL 格式(Updated Lagrange Formulation) [147; 155]。虽然 TL 格式和 UL 格式在本质上是等价的[150],但是一般而言,荷载作用下结构位移量级较大时宜采用 UL 格式[143],而索单元的主要特征便是大位移[156];此外 TL 中增量线性应变包括初始位移效应,而 UL 格式没有涉及初始位移效应,因而 TL 格式的应变——位移矩阵较 UL 格式复杂[144; 146]。因此本章将采用 UL 格式来列结构的平衡方程。

对于物体的平衡非线性分析必须建立在当前的位形中,也即平衡方程必须建立在结构变形之后的状态上,此时所用的力参数(应力)和变形参数(应变)均是真实的[144; 146],其具体要求有[149]: ①必须保持应力和应变是在同一参考位形中定义; ②同时为了有限元方程分析方便,还必须保证应力、应变的对称性; ③而且从虚功的意义上说,应力应变还要互相共轭。因此,UL 格式常常使用第二

类 Piola-Kirchhoff 应力(本章下文简称为 PK2)和 Green 应变, 文献[144; 146; 147; 148; 149]对二者的特性进行了详细叙述。

### 3.2.1.1 基于有限元理论的 UL 格式

设物体内某节点(笔者注: 某些参数书上把节点称之为质点, 便于行文, 本章统一叫做节点)在非线形迭代过程中初始 0 时刻、第  $k-1$  次迭代后时刻和第  $k$  次迭代后时刻的坐标分别为  $\{c^{(0)}\} = \{x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}\}^T$ 、 $\{c^{(k-1)}\} = \{x^{(k-1)}, y^{(k-1)}, z^{(k-1)}\}^T$  和  $\{c^{(k)}\} = \{x^{(k)}, y^{(k)}, z^{(k)}\}^T$ ; 节点在第  $k-1$  次迭代时和第  $k$  次迭代时相对于初始 0 时刻的位移分别表示为  $\{d^{(k-1)}\} = \{d_x^{(k-1)}, d_y^{(k-1)}, d_z^{(k-1)}\}^T$  和  $\{d^{(k)}\} = \{d_x^{(k)}, d_y^{(k)}, d_z^{(k)}\}^T$ 。上述参数关系有[146; 147]:

$$\{c^{(k-1)}\} = \{c^{(0)}\} + \{d^{(k-1)}\} \quad (3.1a)$$

$$\{c^{(k)}\} = \{c^{(0)}\} + \{d^{(k)}\} \quad (3.1b)$$

由式(3.1)不难得知某节点从第  $k-1$  次迭代到第  $k$  次迭代的增量位移  $\{\Delta d^{(k)}\}$  为[146; 147]:

$$\begin{aligned} \{\Delta d^{(k)}\} &= \{\Delta d_x^{(k)} \quad \Delta d_y^{(k)} \quad \Delta d_z^{(k)}\}^T \\ &= \{d^{(k)}\} - \{d^{(k-1)}\} = \{c^{(k)}\} - \{c^{(k-1)}\} \end{aligned} \quad (3.2)$$

## 1、等参变换的有限元离散

在用有限元方法对求解域离散时, 有限单元有等参元、超参元和亚参元[154]。如果坐标变换和位移函数插值采用相同的结点, 并且采用相同的插值函数, 则这种变换为等参变换, 采用等参变换的单元称为等参单元。

单元内任一节点的未知坐标可以用单元上已知节点(笔者注: 该节点位移实际上是待求的, 如此叙述主要是为了把单元内任一节点和单元上待求节点区分开)进行插值并且采用矩阵形式表示如下[144; 146; 147; 148]:

$$\{c^{(k-1)}\} = [N] \{c_n^{(k-1)}\} \quad (3.3a)$$

$$\{c^{(k)}\} = [N] \{c_n^{(k)}\} \quad (3.3b)$$

式中,  $\{c_n^{(k-1)}\}$ 、 $\{c_n^{(k)}\}$  分别表示在第  $k-1$  次迭代后位形和第  $k$  次迭代后位形中已知节点的坐标;  $[N]$  叫单元插值函数矩阵或单元形函数矩阵。

利用等参元, 式(3.2)中的增量位移的列向量  $\{\Delta d^{(k)}\}$  也可表示成与已知节点位移差之间的关系[144; 146; 147; 148]:

$$\{\Delta d^{(k)}\} = [N] \{\Delta d_n^{(k)}\} \quad (3.4)$$

式中,  $\{\Delta d_n^{(k)}\} = \left\{ \left\{ \Delta d_{x,n}^{(k)} \right\} \left\{ \Delta d_{y,n}^{(k)} \right\} \left\{ \Delta d_{z,n}^{(k)} \right\} \right\}^T$  表示已知节点从第  $k-1$  次迭代到第  $k$  次迭代后的增量位移, 其中元素表示在  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴上的增量位移。

在式(3.3)和式(3.4)中, 当所研究单元中已知节点数为  $n$  时,  $[N]$  表示如下:

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & | & N_2 & 0 & 0 & | & \cdots & | & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & | & 0 & N_2 & 0 & | & \cdots & | & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & | & 0 & 0 & N_2 & | & \cdots & | & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix} \in R^{3 \times 3n} \quad (3.5)$$

式中,  $N_i (i=1, 2, \dots, n) \in R$  在有限元理论中称之为形函数, 在数值分析中称之为插值基函数。

## 2、应变矩阵

### 1) 增量形式的应变矩阵 $[\tilde{B}]$

增量形式的应变矩阵指的是增量应变和增量位移之间的转换矩阵, 本章记作  $[\tilde{B}]$ 。

在 UL 格式中, 单元中某节点的从第  $k-1$  次迭代到第  $k$  次迭代后的 Green 增量应变  $\{\Delta E^{(k)}\}$  表示为[144; 146; 147; 155]:

$$\{\Delta E^{(k)}\} = \{\Delta E_L^{(k)}\} + \{\Delta E_N^{(k)}\} \quad (3.6)$$

式中,  $\{\Delta E_L^{(k)}\}$  和  $\{\Delta E_N^{(k)}\}$  分别表示  $\{\Delta E^{(k)}\}$  的线性部分和非线性部分。

在式(3.6)中,  $\{\Delta E_L^{(k)}\}$  表示为[144; 146; 147; 155]:

$$\{\Delta E_L^{(k)}\} = [B_L] \{\Delta d_n^{(k)}\} \quad (3.7)$$

式中,  $[B_L] \in R^{6 \times 3n}$  是  $\{\Delta E_L^{(k)}\}$  与  $\{\Delta d_n^{(k)}\}$  之间的转换矩阵, 它与小变形分析中的转换矩阵形式相同[147], 以分块矩阵表示如下[154]:

$$[B_L] = \left[ \left[ B_{L,1} \right] \mid \left[ B_{L,2} \right] \mid \cdots \mid \left[ B_{L,n} \right] \right] \quad (3.8)$$

式中,  $[B_{L,i}] \in R^{6 \times 3} (i=1, 2, \dots, n)$  为[154]:

$$[B_{L,i}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x^{(k-1)}} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z^{(k-1)}} & \frac{\partial N_i}{\partial y^{(k-1)}} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y^{(k-1)}} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z^{(k-1)}} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x^{(k-1)}} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z^{(k-1)}} & \frac{\partial N_i}{\partial y^{(k-1)}} & \frac{\partial N_i}{\partial x^{(k-1)}} & 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.9)$$

由式(3.9)可知UL格式中单元插值函数的求导是对于第 $k-1$ 次迭代后位形的坐标进行求导的,这些坐标的数值是随着迭代次数的变化而变化的,所以对于各次加载都需要重新计算插值函数的导数[155]。

在式(3.6)中,  $\{\Delta E_N^{(k)}\}$  表示为[144; 146; 147; 155]:

$$\{\Delta E_N^{(k)}\} = [\tilde{B}_N] \{\Delta d_n^{(k)}\} \quad (3.10)$$

式中,  $[\tilde{B}_N] \in R^{6 \times 3n}$  为  $\{\Delta E_N^{(k)}\}$  与单元上已知节点增量位移  $\{\Delta d_n^{(k)}\}$  之间的转换矩阵,采用分块矩阵的形式为[144; 146; 147; 155]:

$$[\tilde{B}_N] = \left[ \begin{array}{c|c|c} [\tilde{B}_{N,1}] & & \\ \hline & [\tilde{B}_{N,2}] & \\ \hline & & \cdots \\ \hline & & & [\tilde{B}_{N,n}] \end{array} \right] \quad (3.11)$$

式中,  $[\tilde{B}_{N,i}] \in R^{6 \times 3}$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) 为[148]:

$$[\tilde{B}_{N,i}] = \frac{1}{2} \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial \Delta d_x^{(k)}}{\partial x^{(k-1)}} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x^{(k-1)}} & \frac{\partial \Delta d_y^{(k)}}{\partial x^{(k-1)}} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x^{(k-1)}} & \frac{\partial \Delta d_z^{(k)}}{\partial x^{(k-1)}} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x^{(k-1)}} \\ \frac{\partial \Delta d_x^{(k)}}{\partial y^{(k-1)}} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial y^{(k-1)}} & \frac{\partial \Delta d_y^{(k)}}{\partial y^{(k-1)}} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial y^{(k-1)}} & \frac{\partial \Delta d_z^{(k)}}{\partial y^{(k-1)}} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial y^{(k-1)}} \\ \frac{\partial \Delta d_x^{(k)}}{\partial z^{(k-1)}} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial z^{(k-1)}} & \frac{\partial \Delta d_y^{(k)}}{\partial z^{(k-1)}} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial z^{(k-1)}} & \frac{\partial \Delta d_z^{(k)}}{\partial z^{(k-1)}} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial z^{(k-1)}} \\ \frac{\partial \Delta d_x^{(k)}}{\partial z^{(k-1)}} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial y^{(k-1)}} + \frac{\partial \Delta d_x^{(k)}}{\partial y^{(k-1)}} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial z^{(k-1)}} & \frac{\partial \Delta d_y^{(k)}}{\partial z^{(k-1)}} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial y^{(k-1)}} + \frac{\partial \Delta d_y^{(k)}}{\partial y^{(k-1)}} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial z^{(k-1)}} & \frac{\partial \Delta d_z^{(k)}}{\partial z^{(k-1)}} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial y^{(k-1)}} + \frac{\partial \Delta d_z^{(k)}}{\partial y^{(k-1)}} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial z^{(k-1)}} \\ \frac{\partial \Delta d_x^{(k)}}{\partial z^{(k-1)}} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x^{(k-1)}} + \frac{\partial \Delta d_x^{(k)}}{\partial x^{(k-1)}} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial z^{(k-1)}} & \frac{\partial \Delta d_y^{(k)}}{\partial z^{(k-1)}} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x^{(k-1)}} + \frac{\partial \Delta d_y^{(k)}}{\partial x^{(k-1)}} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial z^{(k-1)}} & \frac{\partial \Delta d_z^{(k)}}{\partial z^{(k-1)}} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x^{(k-1)}} + \frac{\partial \Delta d_z^{(k)}}{\partial x^{(k-1)}} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial z^{(k-1)}} \\ \frac{\partial \Delta d_x^{(k)}}{\partial y^{(k-1)}} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x^{(k-1)}} + \frac{\partial \Delta d_x^{(k)}}{\partial x^{(k-1)}} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial y^{(k-1)}} & \frac{\partial \Delta d_y^{(k)}}{\partial y^{(k-1)}} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x^{(k-1)}} + \frac{\partial \Delta d_y^{(k)}}{\partial x^{(k-1)}} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial y^{(k-1)}} & \frac{\partial \Delta d_z^{(k)}}{\partial y^{(k-1)}} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x^{(k-1)}} + \frac{\partial \Delta d_z^{(k)}}{\partial x^{(k-1)}} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial y^{(k-1)}} \end{array} \right] \quad (3.12)$$

把式(3.7)和式(3.10)代入式(3.6),得单元中某一点的Green增量应变与已知节点增量位移之间的关系:

$$\{\Delta E^{(k)}\} = [\tilde{B}] \{\Delta d_n^{(k)}\} \quad (3.13)$$

式中,  $[\tilde{B}] \in R^{6 \times 3n}$  为增量形式的应变矩阵,其表达式为:

$$[\tilde{B}] = [B_L] + [\tilde{B}_N] \quad (3.14)$$

## 2) 变分形式的应变矩阵 $[B]$

变分形式的应变矩阵指的是增量应变变分和增量位移变分之间的转换矩阵,本章记作  $[B]$ 。虚功原理需要用到应变增量的变分形式,所以在此有必要指出变分形式的应变矩阵  $[B] \in R^{6 \times 3n}$ ,其表达式为[144; 146; 147; 155]:

$$[B] = [B_L] + [B_N] \quad (3.15)$$

式中,  $[B_N] = 2[\tilde{B}_N]$ 。

### 3、局部坐标系下单元增量分解形式的 UL 格式

#### 1) 单元平衡方程

在局部坐标系下, 无任何条件的单元 UL 格式的平衡方程为[144; 146; 147; 155]:

$$\int_{V^{(k-1)}} \left( [B]^T \{ \Delta S^{(k)} \} \right) dV^{(k-1)} + [k_{S,e}^{(k-1)}] \{ \Delta d_n^{(k)} \} = \{ r_e^{(k)} \} - \{ f_{S,e}^{(k-1)} \} \quad (3.16)$$

式中,  $\{ \Delta S^{(k)} \}$  表示从第  $k-1$  次迭代后到第  $k$  次迭代后的 PK2 增量;  $\{ r_e^{(k)} \}$  表示第  $k$  次迭代时的体力荷载、面力荷载的等效节点力向量;  $\{ f_{S,e}^{(k-1)} \}$  表示单元在第  $k-1$  次迭代后的位形引起的初应力等效节点力向量;  $[k_{S,e}^{(k-1)}]$  表示第  $k-1$  次迭代后结构位形引起的预应力刚度矩阵或几何刚度矩阵。  $\{ r_e^{(k)} \}$ 、 $\{ f_{S,e}^{(k-1)} \}$  和  $[k_{S,e}^{(k-1)}]$  分别表达如下[144; 146; 147; 155]:

$$\{ r_e^{(k)} \} = \int_{A^{(k-1)}} [N]^T \{ p^{(k)} \} dA^{(k-1)} + \int_{V^{(k-1)}} [N]^T \{ q^{(k)} \} dV^{(k-1)} \quad (3.17)$$

$$\{ f_{S,e}^{(k-1)} \} = \int_{V^{(k-1)}} \left( [B_L]^T \{ S^{(k-1)} \} \right) dV^{(k-1)} \quad (3.18)$$

$$[k_{S,e}^{(k-1)}] = \int_{V^{(k-1)}} \left( [G]^T [S^{(k-1)}] [G] \right) dV^{(k-1)} \quad (3.19)$$

在式(3.16)~式(3.19)中,  $V^{(k-1)}$ 、 $A^{(k-1)}$  分别表示物体在第  $k-1$  次迭代后位形的体积、表面积;  $\{ p^{(k)} \}$  和  $\{ q^{(k)} \}$  分别表示第  $k$  次迭代时的面力荷载和体力荷载的等效节点力向量;  $[S^{(k-1)}]$  表示物体在第  $k-1$  次迭代后位形的初应力构成的单元应力矩阵。

另外, 式(3.19)中的  $[G] \in R^{9 \times 3n}$  的分块矩阵形式表达如下[144; 146; 147; 155]:

$$[G] = [[G_1] \mid [G_2] \mid \cdots \mid [G_n]] \quad (3.20)$$

式中,  $[G_i] \in R^{9 \times 3}$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 为:



$$[G_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x^{(k-1)}} & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y^{(k-1)}} & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z^{(k-1)}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x^{(k-1)}} & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y^{(k-1)}} & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z^{(k-1)}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x^{(k-1)}} & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y^{(k-1)}} & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z^{(k-1)}} \end{bmatrix}^T \quad (3.21)$$

在式(3.19)中,  $[S^{(k-1)}]$ 表示为[144; 147]:

$$[S^{(k-1)}] = \begin{bmatrix} S_{xx}^{(k-1)} & 0 & 0 & S_{xy}^{(k-1)} & 0 & 0 & S_{zx}^{(k-1)} & 0 & 0 \\ 0 & S_{xx}^{(k-1)} & 0 & 0 & S_{xy}^{(k-1)} & 0 & 0 & S_{zx}^{(k-1)} & 0 \\ 0 & 0 & S_{xx}^{(k-1)} & 0 & 0 & S_{xy}^{(k-1)} & 0 & 0 & S_{zx}^{(k-1)} \\ S_{xy}^{(k-1)} & 0 & 0 & S_{yy}^{(k-1)} & 0 & 0 & S_{yz}^{(k-1)} & 0 & 0 \\ 0 & S_{xy}^{(k-1)} & 0 & 0 & S_{yy}^{(k-1)} & 0 & 0 & S_{yz}^{(k-1)} & 0 \\ 0 & 0 & S_{xy}^{(k-1)} & 0 & 0 & S_{yy}^{(k-1)} & 0 & 0 & S_{yz}^{(k-1)} \\ S_{zx}^{(k-1)} & 0 & 0 & S_{yz}^{(k-1)} & 0 & 0 & S_{zz}^{(k-1)} & 0 & 0 \\ 0 & S_{zx}^{(k-1)} & 0 & 0 & S_{yz}^{(k-1)} & 0 & 0 & S_{zz}^{(k-1)} & 0 \\ 0 & 0 & S_{zx}^{(k-1)} & 0 & 0 & S_{yz}^{(k-1)} & 0 & 0 & S_{zz}^{(k-1)} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

式中, 右端矩阵里的单个元素表示第  $k-1$  次迭代后位形的初应力状态。

## 2) 平衡方程的线性化

在式(3.16)中, 由式(3.15)可知左边第一项中  $[B]$  是非线性的, 而且单元应力增量  $\{\Delta S^{(k)}\}$  与单元 Green 应变增量  $\{\Delta E^{(k)}\}$  之间常常是非线性关系, 因此式(3.16)是非线性的。因为方程常常采用数值迭代方法进行求解, 需要预先对它们进行线性化处理[51], 因此结构的非线性分析实际上是建立在一连串线性分析的基础上实现的[145], 非线性分析是线性分析的直接延伸[156]。线性化处理包括物理方程的线性化和求解格式的进一步线性化[155]。

### (1) 物理方程的线性化

在工程实际中, 几何非线性问题除了采用非线性的平衡方程和非线性的几何关系外, 还需要引入相应的非线性应力应变关系[155]。物理方程的线性化实际上就是材料本构方程(即应力应变关系)的线性化。假设单元应力增量  $\{\Delta S^{(k)}\}$  与单元 Green 应变增量  $\{\Delta E^{(k)}\}$  成线性关系, 则 UL 格式的物理方程有[144; 146; 155]:

$$\{\Delta S^{(k)}\} = [D]\{\Delta E^{(k)}\} \quad (3.23)$$

式中,  $[D]$  为材料的本构关系矩阵或应力—应变关系矩阵。

实际上, 式(3.23)所示线性关系仅对线弹性材料是真实的, 对于其它材料, 线性关系仅能用于联系应力速率和应变速率, 此时线性关系仅对无穷小步长才是真实的[155], 文献[147; 148; 150]对此进行了详细的阐述。虽然式(3.23)所示关系还不能完全定义弹性有限变形状态的行为, 然而对于小变形、大位移的情况它是有用的[148]。如果  $[D]$  是常数矩阵, 则材料属于线弹性[147], 此时式(3.23)即为 Hook 定律。而且对于杆件结构, 当不考虑剪切变形时,  $[D]$  就成为一个常数, 即材料的弹性模量[145]。

## (2) 求解格式的线性化

求解格式的线性化也叫几何方面的线性化[147]或运动方程的线性化[144; 146]。式(3.16)左端第一项可以展开为[144; 146; 147; 155]:

$$\begin{aligned} \int_{V^{(k-1)}} \left( [B]^T \{\Delta S^{(k)}\} \right) dV^{(k-1)} &= \left[ k_{L,e}^{(k-1)} \right] \{\Delta d_n^{(k)}\} + \left[ k_{N,e}^{(k-1)} \right] \{\Delta d_n^{(k)}\} \\ &= \left( \left[ k_{L,e}^{(k-1)} \right] + \left[ k_{N,e}^{(k-1)} \right] \right) \{\Delta d_n^{(k)}\} \end{aligned} \quad (3.24)$$

式中,  $\left[ k_{L,e}^{(k-1)} \right]$  和  $\left[ k_{N,e}^{(k-1)} \right]$  分别表示第  $k-1$  次迭代后结构位形引起的单元线性刚度矩阵和单元非线性刚度矩阵。

在式(3.24)中, 右端第一项关于已知节点增量位移  $\{\Delta d_n^{(k)}\}$  是线性的, 而第二项关于  $\{\Delta d_n^{(k)}\}$  是非线性的。在一个增量步内, 只要  $\Delta t$  足够小, 可以将非线性项忽略达到求解格式的线性化, 线性化后局部坐标系下单元增量分解形式的 UL 格式平衡方程为[155]:

$$\left( \left[ k_{L,e}^{(k-1)} \right] + \left[ k_{S,e}^{(k-1)} \right] \right) \{\Delta d_n^{(k)}\} = \{r_e^{(k)}\} - \{f_{S,e}^{(k-1)}\} \quad (3.25)$$

式中,  $\left[ k_{L,e}^{(k-1)} \right]$  表示如下[144; 146; 147; 155]:

$$\left[ k_{L,e}^{(k-1)} \right] = \int_{V^{(k-1)}} \left( [B_L]^T [D] [B_L] \right) dV^{(k-1)} \quad (3.26)$$

在式(3.25)中, 非线性迭代过程中每一步荷载增量和增量位移之间的关系通过一个切线刚度矩阵来给定的, 该切线刚度矩阵包含通常线性分析时的弹性刚度矩阵和用于说明有限几何外形变化引起的非线性几何刚度矩阵[143; 156], 文献[143; 156]中的非线性几何刚度矩阵即为  $\left[ k_{S,e}^{(k-1)} \right]$ 。

## 4、整体坐标系下单元增量分解形式的 UL 格式

在有限元方法中,节点位移协调是一个基本要求,这要把单元位移和物理特性(刚度矩阵和单元力)转化到整体坐标系中[132; 157]。此外结构各力学参量如应力、应变和位移的求解都是在整体坐标系中进行的,因此需要将局部坐标中的刚度矩阵、位移增量和外荷载等转化到整体坐标系中,以得到整体坐标系下的平衡方程,进而求得结构的变形和内力[143]。

在坐标转换过程中,需要用到转换矩阵。转换矩阵是联系在单元坐标系(即局部坐标系)中测得的结点位移和在整体坐标系中测得的结点位移的一个矩阵[51]。转换矩阵可以为长方形矩阵或方阵,当采用方阵时,第 $k-1$ 次迭代后结构位形的转换矩阵 $[T^{(k-1)}] \in R^{3n \times 3n}$ 采用分块矩阵的形式为[51]:

$$[T^{(k-1)}] = \begin{bmatrix} [\lambda] & [0] & \cdots & [0] \\ [0] & [\lambda] & \cdots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & \cdots & [\lambda] \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

式中, $n$ 为节点数,每个节点有3个自由度;子块 $[\lambda]$ 为[154; 156; 158]:

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \cos(x^{(k-1)}, X) & \cos(x^{(k-1)}, Y) & \cos(x^{(k-1)}, Z) \\ \cos(y^{(k-1)}, X) & \cos(y^{(k-1)}, Y) & \cos(y^{(k-1)}, Z) \\ \cos(z^{(k-1)}, X) & \cos(z^{(k-1)}, Y) & \cos(z^{(k-1)}, Z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

式中, $(x^{(k-1)}, y^{(k-1)}, z^{(k-1)})$ 、 $(X, Y, Z)$ 分别表示第 $k-1$ 次迭代后结构位形的局部坐标系和整体坐标系(整体坐标系是固定的);各元素是局部坐标系与整体坐标系之间的方向余弦。式(3.27)通常称为旋转矩阵,它是一个正交矩阵。

当求出坐标转化矩阵 $[T^{(k-1)}]$ 后,由式(3.25)可得整体坐标系下单元增量分解形式的UL格式:

$$\left( [K_{L,e}^{(k-1)}] + [K_{S,e}^{(k-1)}] \right) \{ \Delta D_n^{(k)} \} = \{ R_e^{(k)} \} - \{ F_{S,e}^{(k-1)} \} \quad (3.29)$$

式中参数是式(3.25)中相关参数对应的在整体坐标系下的值,表示如下[144; 146; 147; 155]:

$$[K_{L,e}^{(k-1)}] = [T^{(k-1)}]^T [k_{L,e}^{(k-1)}] [T^{(k-1)}] \quad (3.30)$$

$$[K_{S,e}^{(k-1)}] = [T^{(k-1)}]^T [k_{S,e}^{(k-1)}] [T^{(k-1)}] \quad (3.31)$$

$$\{ \Delta D_n^{(k)} \} = [T^{(k-1)}]^T \{ \Delta d_n^{(k)} \} \quad (3.32)$$

$$\{ R_e^{(k)} \} = [T^{(k-1)}]^T \{ r_e^{(k)} \} \quad (3.33)$$

$$\{F_{S,e}^{(k-1)}\} = [T^{(k-1)}]^T \{f_{S,e}^{(k-1)}\} \quad (3.34)$$

在使用坐标变换时，文献[42]指出：①使用坐标变换是为了适应在总体坐标系中任意取向的各向异性材料并迫使不同类型的相邻单元共享相同的自由度；②变换中常常出现 $[Q] = [T]^T [Q'] [T]$ 的形式，此处 $[Q']$ 是被变换的矩阵， $[T]$ 是变换矩阵，如果 $[Q']$ 是对称的，则变换的结果矩阵 $[Q]$ 也是对称的，根据需要， $[T]$ 可以为长方形矩阵或方阵， $[T]$ 为方阵时可以不是正交的；③式(3.30)和式(3.31)的变换既不能看作是改变单元的属性，也不能看作是改变在总体坐标中单元的方位，倒可以看作是改变了单元属性的外在表达式，使其与自由度从整体坐标系结点位移到局部坐标系结点位移的变化相协调；④变换矩阵 $[T]$ 不必具有特殊形式。

## 5、整体坐标系下结构体系增量分解形式的 UL 格式

在有限元分析中，需要将离散的单元矩阵进行组装形成整个结构体系矩阵，并建立起结构体系的平衡方程。结构体系的平衡方程常常采用直接刚度法，文献[144; 145; 146; 157; 158]对此进行了详细的阐述，本章仅给出引入位移边界条件后的整体坐标系下结构体系增量分解形式的 UL 格式：

$$\left( [K_L^{(k-1)}] + [K_S^{(k-1)}] \right) \{ \Delta D^{(k)} \} = \{ R^{(k)} \} - \{ F_S^{(k-1)} \} \quad (3.35)$$

式中相关参数是式(3.29)对应的考虑位移边界条件后的整体坐标系下结构体系的值。因为支座处的位移约束排出了结构发生刚体位移的可能性，这样给定的荷载之下结构的变形和结点的位移都是唯一确定的[145]。

对于 UL 格式，由于参考位形始终在变化，参考于第  $k-1$  次迭代后结构位形，式(3.35)中的增量位移  $\{ \Delta D^{(k)} \}$  便相当于绝对位移，即  $\{ \Delta D^{(k)} \} = \{ D^{(k)} \}$  [144; 146; 147]。

### 3.2.1.2 基于 UL 格式的静力几何非线性平衡方程的 Newton 数值迭代求解

#### 1、非线性方程 $[K(\{D\})]\{D\} = \{R\{D\}\}$ 的数值迭代求解

对于非线性结构的静力分析，迭代计算是非常必要的[153]。工程中常常将整体坐标系下的结构体系的平衡方程式(3.35)写成更为广泛的非线性平衡形式：

$$[K(\{D\})]\{d\} - \{R\{D\}\} = \{0\} \quad (3.36)$$

式中， $\{D\}$  为位移； $[K(\{D\})]$  为与位移有关的非线性刚度矩阵； $\{R(\{D\})\}$  为力。

对于非线性平衡方程式(3.36)，因为刚度矩阵  $[K(\{D\})]$  也许还有荷载  $\{R(\{D\})\}$  成为位移  $\{d\}$  的函数，构建  $[K(\{D\})]$  和  $\{R(\{D\})\}$  的信息无法预先知

道,不能立即求出 $\{D\}$ ,为了求解 $\{D\}$ 和与之相关的 $[K(\{D\})]$ 和 $\{R(\{D\})\}$ ,要求使用迭代法,使式(3.36)成立[42]。数值迭代求解非线性方程和方程组的方法较多,文献[147; 148; 159; 160]等作了非常详细的阐述,其中应用最广泛和最强健的方法便是Newton法(即Newton-Raphson法),目前使用的很多有效的迭代法都是以该方法为基础而发展起来的[150]。本章对式(3.36)的Newton数值迭代求解方法进行简单的介绍。

为了讨论方便,令式(3.36)表达成函数形式:

$$\{f(\{D\})\} = [K(\{D\})]\{D\} - \{R\{D\}\} \quad (3.37)$$

在函数线性化过程中,Taylor级数展开扮演着十分重要的角色。对式(3.37)的函数 $\{f(\{D\})\}$ 在 $\{D_*\}$ 处进行Taylor级数展开并取线性项可得:

$$\{f(\{D\})\} = \{f(\{D_*\})\} + [\dot{f}(\{D_*\})](\{D\} - \{D_*\}) \quad (3.38)$$

式中, $[\dot{f}(\{D_*\})]$ 为式(3.37)对位移 $\{D\}$ 求导后且在位移 $\{D_*\}$ 处的切线刚度矩阵,对于多自由度体系,该刚度矩阵为力列向量 $\{f(\{D\})\}$ 对 $\{D\}$ 求Jacobian矩阵后再代入 $\{D_*\}$ 后的值。

当 $\{D_*\}$ 不是式(3.37)的解时, $\{f(\{D_*\})\}$ 便为 $\{D_*\}$ 处的不平衡力:

$$\{f(\{D_*\})\} = [K(\{D_*\})]\{D_*\} - \{R\{D_*\}\} \quad (3.39)$$

当式(3.38)右端项等于 $\{0\}$ ,便可以得到式(3.36)的近似等价形式,即Newton公式:

$$\{f(\{D_*\})\} + [\dot{f}(\{D_*\})](\{D\} - \{D_*\}) = \{0\} \quad (3.40)$$

因而由式(3.40)可求出未知位移 $\{D\}$ 的迭代公式:

$$\{D\} = \{D_*\} - [\dot{f}(\{D_*\})]^{-1} \{f(\{D_*\})\} \quad (3.41)$$

由式(3.41)可知,如果 $\{D_*\}$ 为初位移,则引起位移 $\{D\}$ 的根本原因在于 $\{D_*\}$ 处的不平衡力 $\{f(\{D_*\})\}$ ,亦叫残余力[153]。

由式(3.41)可知Newton法的收敛准则有力收敛准则和位移收敛准则[42; 45],此外还有能量收敛准则[150]。力收敛准则偶尔也是困难的,但是经验已经证明位移收敛准则通常也不令人满意,位移收敛准则可能仅仅因为收敛很慢而终止迭代,或者当不平衡力还相当大的时候就显示收敛[42]。通常如果采用位移收敛准则,应该通过力收敛准则对其进行补充[151]。

在非线形迭代过程中,如果令第 $k$ 次迭代时产生的位移为 $\{D^{(k)}\}$ 及第 $k-1$ 次

迭代时产生的位移  $\{D^{(k-1)}\}$  分别为：

$$\{D^{(k)}\} = \{D\} \quad (3.42)$$

$$\{D^{(k-1)}\} = \{D_*\} \quad (3.43)$$

则式(3.41)便可以表示成迭代形式：

$$\{D^{(k)}\} = \{D^{(k-1)}\} - \left[ \dot{f}(\{D^{(k-1)}\}) \right]^{-1} \left\{ f(\{D^{(k-1)}\}) \right\} \quad (3.44)$$

式中， $\left[ \dot{f}(\{D^{(k-1)}\}) \right]$ 、 $\left\{ f(\{D^{(k-1)}\}) \right\}$  分别为产生  $\{D^{(k-1)}\}$  后的结构位形的刚度矩阵和结构不平衡力。

## 2、UL 格式平衡方程的数值迭代求解

当采用UL格式时，结构的参考位形总是在变化，没有涉及到初位移[147]。在式(3.44)中，如果结构位形更新为产生  $\{D^{(k-1)}\}$  后的结构位形，此时式(3.44)便变成UL格式的位移迭代公式：

$$\{D^{(k)}\} = - \left[ \dot{f}(\{D^{(k-1)}\}) \right]^{-1} \left\{ f(\{D^{(k-1)}\}) \right\} \quad (3.45)$$

但需要注意的是， $\{D^{(k)}\}$  的参考位形是产生  $\{D^{(k-1)}\}$  后的结构位形。

在式(3.45)中，相应于式(3.39)的产生  $\{D^{(k-1)}\}$  后的结构位形的不平衡力  $\left\{ f(\{D^{(k-1)}\}) \right\}$  为：

$$\left\{ f(\{D^{(k-1)}\}) \right\} = - \left\{ R \{D^{(k-1)}\} \right\} \quad (3.46)$$

因此由式(3.45)和式(3.46)可得：

$$\{D^{(k)}\} = \left[ \dot{f}(\{D^{(k-1)}\}) \right]^{-1} \left\{ R \{D^{(k-1)}\} \right\} \quad (3.47)$$

当满足收敛条件时，叠加所有迭代次数的位移  $\{D^{(k)}\}$  便可以得到相对于初始0时刻的绝对位移。

式(3.35)和式(3.47)形式上是完全一致的，因此求解式(3.35)中的增量位移便可以方便地由式(3.47)求取，需要注意的此时有：

$$\left[ \dot{f}(\{D^{(k-1)}\}) \right] = \left[ K_L^{(k-1)} \right] + \left[ K_S^{(k-1)} \right] \quad (3.48)$$

$$\left\{ R \{D^{(k-1)}\} \right\} = \left\{ R^{(k)} \right\} - \left\{ F_S^{(k-1)} \right\} \quad (3.49)$$

式中， $\left\{ R^{(k)} \right\}$  表示第  $k$  次迭代时的结构体系在整体坐标系下的体力荷载、面力荷载的等效节点力向量。在非线性迭代过程中，如果结构上的面力和体力产生的节

点力不随结构位形的改变而改变, 是一个恒定值(即保守力), 则 $\{R^{(k)}\}$ 可以方便地表示为初始0时刻的节点力 $\{R^{(0)}\}$ , 则式中 $\{R\{D^{(k-1)}\}\}$ 表示为:

$$\{R\{D^{(k-1)}\}\} = \{R^{(0)}\} - \{F_S^{(k-1)}\} \quad (3.50)$$

在此需要说明的是, 第4章在根据计算图4.1所示的计算方案二、三中的静力非线性部分时, 都假设结构自重和平均风荷载为保守力, 在第4章中不再予以阐述。

### 3.2.2 动力学中几何线性与几何非线性问题的表达格式及其求解

3.2.1 节介绍了结构静力平衡的表述方法, 但是结构上所作用的力可能随时间变化, 在这种情况下, 位移也随时间变化, 因而这些公式是对任一特定时刻平衡的一种表述[43; 144; 146]。虽然 Bernoulli 首先提出的虚功原理是针对静力问题的, 但是当 D'Alembert 介绍了惯性力的概念后, 虚功原理便可以引入到动力学问题中[132]。在结构的动力问题分析中, 大多数情况下需要同时考虑惯性力和阻尼力, 在运用虚功原理时, 这两种力均可看作是体力的一部分出现在平衡方程中[43; 144; 146; 155]。文献[144; 146; 154; 155; 158; 161]等对基于有限元理论的 UL 格式表述的动力平衡方程进行了推导, 限于篇幅, 本章不予详述。

#### 3.2.2.1 线性动力平衡方程的拟静力平衡方程求解

在结构的动力计算中, 同样可以采用有限单元法建立系统的平衡方程[161]。如果忽略转动影响, 在动力分析中, 因为引入了时间坐标, 处理的是四维时空 $(x, y, z; t)$ 问题, 在有限元分析中一般采用部分离散的分变量法, 即只对空间域进行离散, 这样一来, 此步骤便和静力分析时相同[155]。根据有限元理论, 结构体系的线性动力平衡方程为[42]:

$$[M]\{\ddot{D}\} + [C]\{\dot{D}\} + [K]\{D\} = \{R\} \quad (3.51)$$

式中,  $[M]$ 、 $[C]$  和  $[K]$  分别为结构体系的质量矩阵、阻尼矩阵和线性刚度矩阵, 在第4章图4.1所示的计算方案二和三中,  $[C]$ 、 $[K]$  分别取非线性静力计算结束后结构位形的阻尼矩阵和刚度矩阵;  $\{\ddot{D}\}$ 、 $\{\dot{D}\}$  和  $\{D\}$  分别为结构的节点位移、速度及加速度;  $\{R\}$  为结构体系节点动力荷载。

在数学上, 式(3.51)是一个二阶线性微分方程组, 原则上可用求解常系数微分方程组的标准过程来求得方程组的解, 但是如果矩阵的阶数很高, 则采用求解一般微分方程组的过程可能要付出很高的代价——除非特别利用了系数矩阵  $[K]$ 、 $[C]$  和  $[M]$  的特殊性质[43; 144; 146; 155]。因此式(3.51)常常采用时域中的

数值方法——直接积分法(即逐步积分法)来计算响应时程[42; 43; 144; 146]。直接积分法有显式法和隐式法两种,其中隐式积分适合于结构动力学问题,它应用于非线性问题不会遇到很大的困难[42]。在隐式积分法中,Newmark法[44]由于具有较佳的稳定性和较低的周期延伸已经被广泛应用于工程结构的动力分析中,文献[42; 43; 44; 146; 150; 162]都对此方法进行了详细地介绍,限于篇幅,本章只对Newmark方法进行必要的介绍。

基于Newmark关系式,由式(3.51)可得[42; 43; 44; 144; 146; 150; 162]:

$$[\bar{K}]\{D_{T+\Delta T}\} = \{\bar{R}_{T+\Delta T}\} \quad (3.52)$$

式中,  $[\bar{K}]$  和  $\{\bar{R}_{T+\Delta T}\}$  分别称之为等效刚度矩阵和等效节点力向量,且有[42; 43; 44; 144; 146; 150; 162]:

$$[\bar{K}] = \frac{1}{\beta\Delta T^2}[M] + \frac{\gamma}{\beta\Delta T}[C] + [K] \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} \{\bar{R}_{T+\Delta T}\} = \{R_{T+\Delta T}\} + [M] & \left\{ \frac{1}{\beta\Delta T^2}\{D_T\} + \frac{1}{\beta\Delta T}\{\dot{D}_T\} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\{\ddot{D}_T\} \right\} \\ + [C] & \left\{ \frac{\gamma}{\beta\Delta T}\{D_T\} + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1\right)\{\dot{D}_T\} + \Delta T\left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)\{\ddot{D}_T\} \right\} \end{aligned} \quad (3.54)$$

在式(3.52)~式(3.54)中,  $\Delta T$  表示时间步长;  $\beta$  和  $\gamma$  为决定积分精度与稳定性的常数;  $\{\ddot{D}_T\}$ 、 $\{\dot{D}_T\}$  和  $\{D_T\}$  分别表示荷载步  $T$  时的加速度、速度及位移;  $\{D_{T+\Delta T}\}$  表示荷载步  $T + \Delta T$  时刻的位移;  $\{R_{T+\Delta T}\}$  表示荷载步  $T + \Delta T$  时刻的由面力和体力荷载产生的等效节点力荷载,对于第4章图4.1所示的计算方案二和三,  $\{R_{T+\Delta T}\}$  分别表示荷载步  $T + \Delta T$  时刻的脉动风和整体风荷载(平均风+脉动风)。

根据式(3.52)便可以求出位移  $\{D_{T+\Delta T}\}$ ,再由下面的式(3.55)~式(3.56)可以求出荷载步  $T + \Delta T$  时刻的加速度  $\{\ddot{D}_{T+\Delta T}\}$  和速度  $\{\dot{D}_{T+\Delta T}\}$  [42; 43; 44; 146; 150; 162]:

$$\{\ddot{D}_{T+\Delta T}\} = \frac{1}{\beta\Delta T^2}(\{D_{T+\Delta T}\} - \{D_T\}) - \frac{1}{\beta\Delta T}\{\dot{D}_T\} - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\{\ddot{D}_T\} \quad (3.55)$$

$$\{\dot{D}_{T+\Delta T}\} = \{\dot{D}_T\} + \left[(1 - \gamma)\{\ddot{D}_T\} + \gamma\{\ddot{D}_{T+\Delta T}\}\right]\Delta T \quad (3.56a)$$

或

$$\{\dot{D}_{T+\Delta T}\} = \frac{\gamma}{\beta\Delta T}(\{D_{T+\Delta T}\} - \{D_T\}) - \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1\right)\{\dot{D}_T\} - \Delta T\left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)\{\ddot{D}_T\} \quad (3.56b)$$

式(3.52)为式(3.51)的拟静力形式平衡方程。这样变换便象是求解一组已知荷载矢量和刚度矩阵的静态方程,因此在线性静力分析中使用过的所有求解方法在直接积分法中也能有效地使用[43; 146]。文献[43; 146; 162]等对Newmark方法的



逐步求解过程进行了详细的阐述。

在式(3.53)~式(3.56), 如果令  $c_0 = \frac{1}{\beta\Delta T^2}$ 、 $c_1 = \frac{\gamma}{\beta\Delta T}$ 、 $c_2 = \frac{1}{\beta\Delta T}$ 、 $c_3 = \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)$ 、 $c_4 = \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1\right)$ 、 $c_5 = \Delta T \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)$ 、 $c_6 = (1 - \gamma)\Delta T$ 、 $c_7 = \gamma\Delta T$ , 则式(3.53)~式(3.56)可化成更简洁的形式:

$$[\bar{K}] = c_0[M] + c_1[C] + [K] \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} \{\bar{R}_{T+\Delta T}\} &= \{R_{T+\Delta T}\} + [M]\{c_0\{D_T\} + c_2\{\dot{D}_T\} + c_3\{\ddot{D}_T\}\} \\ &\quad + [C]\{c_1\{D_T\} + c_4\{\dot{D}_T\} + c_5\{\ddot{D}_T\}\} \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\{\ddot{D}_{T+\Delta T}\} = c_0(\{D_{T+\Delta T}\} - \{D_T\}) - c_2\{\dot{D}_T\} - c_3\{\ddot{D}_T\} \quad (3.59)$$

$$\{\dot{D}_{T+\Delta T}\} = \{\dot{D}_T\} + c_6\{\ddot{D}_T\} + c_7\{\ddot{D}_{T+\Delta T}\} \quad (3.60a)$$

或

$$\{\dot{D}_{T+\Delta T}\} = c_1(\{D_{T+\Delta T}\} - \{D_T\}) - c_4\{\dot{D}_T\} - c_5\{\ddot{D}_T\} \quad (3.60b)$$

### 3.2.2.2 非线性动力平衡方程的拟静力平衡方程求解

对于非线性分析, 最有效的方法大概还是逐步积分法[53]。因此线性系统中的 Newmark 方法可以扩展到非线性动力分析中, 这要求在每个时间步长都要进行迭代以满足静力平衡[162]。

如线性分析一样, 我们用隐式时间积分考虑系统在  $T + \Delta T$  的平衡, 在非线性分析中需要进行迭代计算, 而且需要考虑迭代过程中不同迭代次数的加速度和速度对平衡方程的影响[144; 146]。对于需要考虑预应力的几何非线性结构, 基于 UL 格式的非线性时程的动力平衡方程为:

$$[M]\{\ddot{D}_{T+\Delta T}^{(k)}\} + [C]\{\dot{D}_{T+\Delta T}^{(k)}\} + [K_{T+\Delta T}^{(k-1)}]\{\Delta D_{T+\Delta T}^{(k)}\} = \{R_{T+\Delta T}\} - \{F_{T+\Delta T,S}^{(k-1)}\} \quad (3.61)$$

式中,  $\{\ddot{D}_{T+\Delta T}^{(k)}\}$ 、 $\{\dot{D}_{T+\Delta T}^{(k)}\}$  分别表示  $T + \Delta T$  时刻第  $k$  次非线性迭代时的绝对加速度和绝对速度;  $\{\Delta D_{T+\Delta T}^{(k)}\}$  表示  $T + \Delta T$  时刻的非线性迭代过程中第  $k$  次迭代时的相对于  $k - 1$  次迭代后结构位形的位移;  $[K_{T+\Delta T}^{(k-1)}]$ 、 $\{F_{T+\Delta T,S}^{(k-1)}\}$  分别表示产生  $\{\Delta D_{T+\Delta T}^{(k)}\}$  前结构位形的刚度矩阵和预应力等效节点力;  $[C]$  为阻尼矩阵, 文献[53; 161]认为在非线性分析中阻尼矩阵是不变的, 对于第 4 章图 4.1 所示的计算方案一,  $[C]$  指的是找形后结构位形的阻尼矩阵;  $\{R_{T+\Delta T}\}$  含义同式(3.54), 对于第 4 章图 4.1 所示的计算方案一,  $\{R_{T+\Delta T}\}$  表示荷载步  $T + \Delta T$  时刻的结构自重与整体风荷载之和, 并认为  $\{R_{T+\Delta T}\}$  在非线性迭代过程中是保守力。

在式(3.61)中, 关于  $\{\Delta D_{T+\Delta T}^{(k)}\}$ , 存在如下关系[144; 146]:

$$\{D_{T+\Delta T}^{(k)}\} = \{D_{T+\Delta T}^{(k-1)}\} + \{\Delta D_{T+\Delta T}^{(k)}\} \quad (3.62)$$

式中,  $\{D_{T+\Delta T}^{(k)}\}$ 、 $\{D_{T+\Delta T}^{(k-1)}\}$  分别表示  $T + \Delta T$  时刻第  $k$  次和第  $k-1$  次非线性迭代时的绝对位移。

由式(3.59)可知:

$$\{\ddot{D}_{T+\Delta T}^{(k)}\} = c_0 \left( \{D_{T+\Delta T}^{(k)}\} - \{D_T\} \right) - c_2 \{\dot{D}_T\} - c_3 \{\ddot{D}_T\} \quad (3.63)$$

由式(3.60b)可知:

$$\{\dot{D}_{T+\Delta T}^{(k)}\} = c_1 \left( \{D_{T+\Delta T}^{(k)}\} - \{D_T\} \right) - c_4 \{\dot{D}_T\} - c_5 \{\ddot{D}_T\} \quad (3.64)$$

把式(3.62)代入式(3.63)和式(3.64)然后再代入式(3.61)中, 便可以得到非线性动力平衡方程式(3.61)的 UL 格式的拟静力平衡方程:

$$\left[ \bar{K}_{T+\Delta T}^{(k-1)} \right] \{\Delta D_{T+\Delta T}^{(k)}\} = \{\bar{R}_{T+\Delta T}^{(k)}\} \quad (3.65)$$

式中,  $\left[ \bar{K}_{T+\Delta T}^{(k-1)} \right]$  表示产生  $\{\Delta D_{T+\Delta T}^{(k)}\}$  前结构位形的等效刚度矩阵;  $\{\bar{R}_{T+\Delta T}^{(k)}\}$  表示  $T + \Delta T$  时刻的非线性迭代过程中第  $k$  次迭代时的等效荷载, 当采用 UL 格式求解时, 不平衡力为  $-\{\bar{R}_{T+\Delta T}^{(k)}\}$ 。它们的表达式分别如下:

$$\left[ \bar{K}_{T+\Delta T}^{(k-1)} \right] = c_0 [M] + c_1 [C] + \left[ K_{T+\Delta T}^{(k-1)} \right] \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned} \{\bar{R}_{T+\Delta T}^{(k)}\} = & \{R_{T+\Delta T}\} - \{F_{T+\Delta T,S}^{(k-1)}\} - [M] \left( c_0 \left( \{D_{T+\Delta T}^{(k-1)}\} - \{D_T\} \right) - c_2 \{\dot{D}_T\} - c_3 \{\ddot{D}_T\} \right) \\ & - [C] \left( c_1 \left( \{D_{T+\Delta T}^{(k-1)}\} - \{D_T\} \right) - c_4 \{\dot{D}_T\} - c_5 \{\ddot{D}_T\} \right) \end{aligned} \quad (3.67)$$

由式(3.65)便可以对非线性时程进行静力求解, 当满足收敛条件时, 可以由式(3.62)求得  $T + \Delta T$  时刻的绝对位移  $\{D_{T+\Delta T}\}$ , 当求出位移  $\{D_{T+\Delta T}\}$  后便可以根据式(3.59)和式(3.60)求出  $T + \Delta T$  时刻的绝对加速度  $\{\ddot{D}_{T+\Delta T}\}$  和绝对速度  $\{\dot{D}_{T+\Delta T}\}$ 。求出这些值后, 便可以进行下一个荷载步的计算。

不难得知上面的分析过程为增量分析。由于增量分析是以时间(或荷载)步长为  $\Delta T$  进行的, 在每个荷载步中需要用到初始条件。迭代的初始条件为[144; 146]:

$$\left[ K_{T+\Delta T}^{(0)} \right] = \left[ K_T \right] \quad (3.68)$$

$$\{F_{T+\Delta T}^{(0)}\} = \{F_T\} \quad (3.69)$$

$$\{D_{T+\Delta T}^{(0)}\} = \{D_T\} \quad (3.70)$$

### 3.2.2.3 线性、非线性动力平衡方程的精度和稳定性

在用直接积分法求解系统的运动方程时, 积分格式的稳定性是一个非常重要

的概念, 文献[42; 43; 144; 146; 155; 162]等对线性系统的Newmark方法的稳定性进行了非常详细的阐述, 本章不再细述。

大多数数值方法稳定性理论与线性或线性化系统有关[43; 144; 146; 150], 因此应当注意到在线性问题中的无条件稳定性并不能确保非线性问题当中的无条件稳定性[42]。不过如果一种数值方法对于线性系统是不稳定的, 当然它对于非线性系统也将是不稳定的, 因为线性系统是非线性系统的子集, 幸运的是上述说法反之也已经被证明是正确的——在几乎所有情况中, 对于线性系统稳定的数值方法对于非线性系统来说结果是稳定的, 因此线性系统数值过程的稳定性对于它们在线性和非线性系统里的行为提供了一个有用的指导[150]。考虑到已有的理论分析和已经取得的试验结果, 最后可以提出下面的建议: 总的说来, 对于用隐式时间积分的非线性动力分析, 分析者应该采用线性分析中的无条件算子(一种很好的选择是梯形法则), 并采用具有严格收敛限值的平衡迭代[144; 146]。

据此, 第4章在采用Newmark方法计算悬索屋盖的风致时程响应时, 依然采用线性系统的无条件稳定性, 其 $\beta$ 和 $\gamma$ 总的取值原则为[43; 144; 146; 155]:  $\gamma \geq 0.5$  和  $\beta \geq 0.25(0.5 + \gamma)^2$ 。为获得最大可能的高频耗散, 在保持无条件稳定的同时,  $\beta$ 的下列选取是合理的[42]: 对于 $\gamma \geq 0.5$ , 使用 $\beta = 0.25(0.5 + \gamma)^2$ 。在动力计算中, 当 $\gamma = 0.5$ 和 $\beta = 0.25$ 时, Newmark方法可以得出最满意的精度特征曲线, 因而是一种最常用的方法[43; 144; 146]。

在用直接积分法求解系统的运动方程时, 需要考虑积分格式的精度。当Newmark法是无条件稳定的, 即时间步长 $\Delta T$ 的大小不影响解的稳定性, 此时 $\Delta T$ 的选择主要根据解的精度要求确定[150; 155]。当时间步长增加时, 降低了Newton过程的强健性, 较大的时间步长也削弱了Newton方法的收敛性, 较小的时间步长改善了Newton算法的强健性[150]。具体来说可根据对结构响应有主要贡献的若干固有振型的周期来确定 $\Delta T$ [155]。

#### 3.2.2.4 非线性动力时程中的收敛性

此处的收敛性指的是非线性时程过程中用Newmark方法进行隐式积分时利用Newton方法进行非线性迭代过程中的收敛性。第4章的计算方案一为非线性动力时程计算方案, 因而本章在此对非线性动力时程中的收敛性进行必要的介绍。

通常而言, 动力分析中的收敛性比静力分析中的收敛性问题小[52]。而文献[144; 146]则详细指出: 通常情况下, 因为系统的惯性导致系统的动力响应比系统的静力响应更“光滑”, 因此能够想象出动力中的收敛性一般比静力分析中的收敛性快; 此外动力分析中的收敛性总是能够达到的, 只要时间步长 $\Delta T$ 足够小, 但是在非线性静力分析中, 我们更早地注意到Newton-Raphson(笔者注: 原文中

此处为修正的 Newton-Raphson, 笔者认为 Newton-Raphson 也会出现这种情况) 迭代在某些荷载情况下就不收敛。动力分析中收敛较好的数值原因在于质量矩阵和阻尼矩阵(笔者注: 原文中此处没有提到阻尼矩阵, 因为作者推导公式时没有考虑阻尼影响)对等效刚度矩阵(笔者注: 原文中此处的等效刚度矩阵为系数矩阵, 根据文中含义可以得知该系数矩阵即为等效刚度矩阵, 下文同)的影响, 当时间步长较小时, 这一影响甚至是主要的(笔者注: 即式(3.66)中的  $c_0$  和  $c_1$  比较大)[144; 146]。

因为任意非线性动力响应与过程密切相关, 所以非线性动力问题分析要求在每一时间步中的迭代比静力分析中的迭代更加严格, 实际上每一时间步长往往仅需几次迭代便可以得到稳定解[144; 146]。

### 3.2.2.5 线性和非线性时程计算响应时的参数取值

在建立式(3.51)和式(3.61)形式的方程时, 如果采用与计算刚度系数时同样的形函数, 则所得单元的质量矩阵叫做一致(性)质量矩阵[53; 154; 161]或相容质量矩阵[158], 单元采用粘滞阻尼时得到的阻尼矩阵叫一致(性)阻尼矩阵[154]。文献[43; 53; 144; 155; 161]对这两单元矩阵进行了详细介绍。在结构的动力计算中, 经常采用其它形式的质量矩阵和阻尼矩阵, 此外还需要知道初始条件, 本章在此将对这些参数的取值予以必要介绍。

#### 1、集中质量矩阵

虽然一致质量矩阵存在一定的优点, 但目前有限元分析中, 集中质量矩阵仍然被广泛采用[161]。质量矩阵与时间有关, 一般情况下利用时刻  $t = 0$  的位形进行计算[155]。对于三维空间中的匀质二节点直线杆单元, 如果忽略转动惯量的影响, 在单元的两端节点处集中单元质量  $W$  的一半, 便可得出  $t = 0$  时刻的单元集中质量矩阵:

$$[M^e] = \frac{W}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

#### 2、阻尼矩阵

对于一般有限元集合体来说, 要确定阻尼参数如果可能的话也是相当困难的, 尤其是因为阻尼特性是随频率变化的, 因此实际上的结构整体阻尼矩阵一般不是由单元阻尼矩阵集合而成, 而是利用质量矩阵和刚度矩阵以及阻尼量的试验

结果构造出来的[144; 146]。对于结构体系来说，在实际分析中通常将阻尼矩阵简化为质量矩阵和刚度矩阵的线性组合，称之为 Rayleigh 阻尼矩阵[42; 53; 154; 162]:

$$[C] = a_0[M] + a_1[K] \quad (3.72)$$

式中， $a_0$ 、 $a_1$  表示 Rayleigh 阻尼常数，它们是用振型阻尼比  $\xi_n$  计算出来的，满足[42; 53; 162]:

$$2\xi_n\omega_n = a_0 + a_1\omega_n^2 \quad (3.73a)$$

或

$$\xi_n = \frac{1}{2\omega_n}a_0 + \frac{\omega_n}{2}a_1 \quad (3.73b)$$

很明显，只在两个频率  $i$  与  $j$  上就可确定阻尼矩阵，用下列方程来求解  $a_0$  和  $a_1$ [53; 162]:

$$\begin{bmatrix} \xi_i \\ \xi_j \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_i} & \omega_i \\ \frac{1}{\omega_j} & \omega_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

为了确定给定阻尼比  $\xi_n$  情况下的  $a_0$  和  $a_1$ ，通常假定  $a_0$  和  $a_1$  在某个频率范围内近似为定值，这样，在给定阻尼比  $\xi_n$  和一个频率范围后，解式(3.74)便可求得  $a_0$  和  $a_1$ [42]。因为很少能够得到阻尼比随频率变化的详细信息，因此通常假设应用于两个控制频率的阻尼比相同，即  $\xi_i = \xi_j = \xi$ ， $a_0$  和  $a_1$  便可由如下形式计算[53; 162]:

$$a_0 = \frac{2\omega_i\omega_j\xi}{\omega_i + \omega_j} = \omega_i\omega_j a_1, \quad a_1 = \frac{2\xi}{\omega_i + \omega_j} \quad (3.75)$$

阻尼与质量有关，主要影响低阶振型，而阻尼与刚度有关，主要影响高阶振型，所以式(3.72)中的  $a_0[M]$  对最低几阶模态的阻尼贡献最大，而  $a_1[K]$  对最高几阶模态的阻尼贡献最大[42]。对于式(3.75)，在阻尼比  $\xi$  一定的情况下， $\omega_i$  和  $\omega_j$  的取值非常重要，因为它们影响到  $a_0$  和  $a_1$ 。关于如何确定  $\omega_i$  和  $\omega_j$  的问题，文献[43; 146]在求一个多自由度系统的 Rayleigh 常数时， $\omega_i$  和  $\omega_j$  分别是采用一定数量低阶频率的平均值和一定数量高阶频率的平均值。

### 3、初始条件

在进行隐式求解运动方程时，需要知道荷载步  $T = 0$  时刻的加速度  $\{\ddot{D}_0\}$ 、速度  $\{\dot{D}_0\}$  和位移  $\{D_0\}$ 。其中  $\{\ddot{D}_0\} = \{0\}$ 、 $\{\dot{D}_0\} = \{0\}$  是人们感兴趣的方法。 $\{D_0\}$  与

参考位形有关, 如果参考位形不同,  $\{D_0\}$  取值也不同。第4章按照图4.1三种方案进行悬索屋盖的风致时程响应计算时, 对于计算方案一, 参考位形为找形后的位形, 此时有  $\{D_0\} = \{0\}$ 。对于计算方案二, 参考位形为结构自重、平均风荷载和预应力作用下静平衡位置, 此时也有  $\{D_0\} = \{0\}$ 。计算方案三的参考位形为结构自重和预应力作用下静平衡位置, 此时同样有  $\{D_0\} = \{0\}$ 。

### 3.3 具有几何非线性特征的大跨屋盖的几何非线性有限元理论

在具有几何非线性特征的大跨屋盖中, 预应力鞍形索网屋盖是一种非常典型的结构形式, 本章将以该种结构形式对需考虑几何非线性的大跨屋盖进行研究。

#### 3.3.1 基本假定

在建立结构的平衡方程时, 为简化计算, 特作如下基本假定[8; 142]:

- 1) 索是完全柔性的, 即它不能承受任何弯矩, 没有弯曲刚度。本假定是基本合理的, 虽然索在支座处和索网连接处有一定程度的刚性。不过一个真实的索单元具有抗弯刚度, 但是拉得非常紧的索, 抗弯刚度可以忽略, 然而对于跨长比小于 0.8 时, 抗弯刚度不能忽略[137]。
- 2) 索不能承受压力。这一假定显然是正确的, 因为基于索的几何特性, 其屈曲强度可忽略不计。
- 3) 围护结构(覆盖物)的质量需要考虑, 但对屋盖结构的刚度可以忽略。
- 4) 两根或多根索的交点可看作一铰接点。这在大多数情况下是正确的, 因为索是(用夹具)夹住的, 文献[163]对此进行了详细的说明。
- 5) 两铰接点之间的索单元是直线的, 这也含蓄地假定了包括索自重在内的所有荷载均仅仅作用在节点上以及索单元自身是无重量的。该假定在预应力阶段是很合理的, 此时预应力远大于由索自重引起的应力。

文献[137]也基于多项式插值函数, 把索单元分成两节点直线杆单元、多节点等参有限单元和考虑转动自由度的弯曲单元。同时该文献[137]又基于解析函数, 把索单元分成抛物线单元、弹性悬链线单元和准悬链线单元。通过上述不同索单元之间的对比分析, 文献[137]发现绷紧的不同单元有着相似结果, 然而对于松弛的不同单元, 差异较大不能忽略。文献[138]认为索单元取为直线这一假定很符合实际。文献[156]认为基于有限元理论的集中参数概念, 系统上由质量、弹性和外荷载等产生的影响均可看作是集中在端节点上, 因此索单元的所有行为和特征便被节点上的不同参量或变量来加以表现。

文献[36]指出通过预加应力的初始变形, 可以不考虑温度荷载, 因此本章没

有考虑温度效应的影响。

### 3.3.2 几何非线性问题中相关参数

#### 3.3.2.1 局部坐标系下预应力索单元的计算参数

虽然单元与局部坐标系的相对位置可以任意假定,但是局部坐标的方向应该和单元的几何形状相适应,这样描述单元横截面的特性就不会产生混乱[42]。对一个2节点直线单元来说,可以沿单元方向的局部坐标系来计算单元矩阵,然后再变换到整体坐标系中[144]。设Newton迭代过程中第 $k-1$ 次迭代后位形时的直线索单元 $pq$ 位于局部坐标系 $o-xyz$ 中的 $x$ 轴上,并且节点 $p$ 和局部坐标系的原点 $o$ 重合。整体坐标系 $O-XYZ$ 和局部坐标系中的直线索单元如图3.1所示。

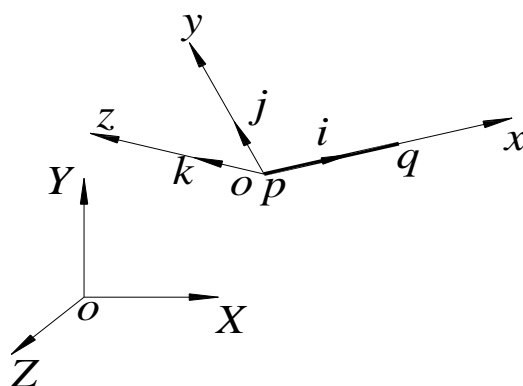


图 3.1 整体和局部坐标系中的直线索单元[143]

#### 1、单元位移函数

位移函数是否精确影响到刚度矩阵的精确度,如果所用的是精确的单元位移,则所得的刚度系数与平衡微分方程所解得的相同[43; 144]。对于两节点直线轴力单元,可采用线性插值叠加方式(即一次等参元)表达出精确的单元位移函数[132; 143; 157]。根据式(3.2)~式(3.5),在图3.1所示的局部坐标系中,单元内任一节点在第 $k$ 次迭代时产生的位移 $\{d^{(k)}\}$ 可用单元两端节点 $p$ 、 $q$ 在第 $k$ 次迭代时产生的位移 $\{d_{pq}^{(k)}\} = \{d_{x,p}^{(k)} \quad d_{y,p}^{(k)} \quad d_{z,p}^{(k)} \mid d_{x,q}^{(k)} \quad d_{y,q}^{(k)} \quad d_{z,q}^{(k)}\}^T$ 和该节点在第 $k-1$ 次迭代后的在局部坐标系中的坐标 $\{x^{(k-1)} \quad 0 \quad 0\}^T$ 精确地表示为[132; 143; 157]:

$$\{d^{(k)}\} = [N]\{d_{pq}^{(k)}\} \quad (3.76)$$

式中, $l^{(k-1)}$ 表示第 $k-1$ 次迭代后的单元长度;  $[N]$ 为索单元的形函数矩阵,根据式(3.5)可知:

$$[N] = \begin{bmatrix} N_p & 0 & 0 & | & N_q & 0 & 0 \\ 0 & N_p & 0 & | & 0 & N_q & 0 \\ 0 & 0 & N_p & | & 0 & 0 & N_q \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

式中，节点  $p$ 、 $q$  处的形函数为[132; 143; 157]:

$$N_p = \frac{l^{(k-1)} - x^{(k-1)}}{l^{(k-1)}} \quad (3.78a)$$

$$N_q = \frac{x^{(k-1)}}{l^{(k-1)}} \quad (3.78b)$$

## 2、单元的 Green 应变(几何方程)

几何方程就是描述宏观变形(位移)和微观变形(应变)之间的表达关系。对于直线索单元，其位移只有轴向的伸长和缩短，在局部坐标系中，其 Green 应变即几何方程可表示为[143]:

$$\varepsilon_x = \frac{d(d_x^{(k)})}{d(x^{(k-1)})} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{d(d_x^{(k)})}{d(x^{(k-1)})} \right)^2 + \left( \frac{d(d_y^{(k)})}{d(x^{(k-1)})} \right)^2 + \left( \frac{d(d_z^{(k)})}{d(x^{(k-1)})} \right)^2 \right] \quad (3.79)$$

式中， $\frac{d(\cdot)}{d(\cdot)}$  表示微分算子。

式(3.79)也可以根据工程应变的定义更加直观地得出，具体如下：在局部坐标系中，位于  $x$  轴上的两节点空间直线索单元产生第  $k$  次迭代位移前的初始长度为  $dx = d(x^{(k-1)})$ ，变形后单元两端沿  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴产生了相对位移  $d(d_x^{(k)})$ 、 $d(d_y^{(k)})$ 、 $d(d_z^{(k)})$ ，变形后的长度为  $dx' = \sqrt{\left( d(x^{(k-1)}) + d(d_x^{(k)}) \right)^2 + \left( d(d_y^{(k)}) \right)^2 + \left( d(d_z^{(k)}) \right)^2}$ 。按照工程应变的定义，空间直线索单元的应变为：

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{dx' - dx}{dx} = \frac{dx'}{dx} - 1 = \sqrt{\left( 1 + \frac{d(d_x^{(k)})}{d(x^{(k-1)})} \right)^2 + \left( \frac{d(d_y^{(k)})}{d(x^{(k-1)})} \right)^2 + \left( \frac{d(d_z^{(k)})}{d(x^{(k-1)})} \right)^2} - 1 \\ &= \sqrt{1 + 2 \frac{d(d_x^{(k)})}{d(x^{(k-1)})} + \left( \frac{d(d_x^{(k)})}{d(x^{(k-1)})} \right)^2 + \left( \frac{d(d_y^{(k)})}{d(x^{(k-1)})} \right)^2 + \left( \frac{d(d_z^{(k)})}{d(x^{(k-1)})} \right)^2} - 1 \\ &\approx 1 + \frac{1}{2} \left[ 2 \frac{d(d_x^{(k)})}{d(x^{(k-1)})} + \left( \frac{d(d_x^{(k)})}{d(x^{(k-1)})} \right)^2 + \left( \frac{d(d_y^{(k)})}{d(x^{(k-1)})} \right)^2 + \left( \frac{d(d_z^{(k)})}{d(x^{(k-1)})} \right)^2 \right] - 1 \\ &= \frac{d(d_x^{(k)})}{d(x^{(k-1)})} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{d(d_x^{(k)})}{d(x^{(k-1)})} \right)^2 + \left( \frac{d(d_y^{(k)})}{d(x^{(k-1)})} \right)^2 + \left( \frac{d(d_z^{(k)})}{d(x^{(k-1)})} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.79)$$



在此需要说明的是, 式(3.79)中 $\approx$ 部分采用了 Taylor 级数展开并仅取前面两项。

### 3、单元线性应变矩阵

根据式(3.8)和式(3.9)可得直线索的 $[B_L]$ 变成:

$$\begin{aligned} \{B_L\} &= \left\{ \frac{dN_p}{dx^{(k-1)}} \quad 0 \quad 0 \quad \left| \quad \frac{dN_q}{dx^{(k-1)}} \quad 0 \quad 0 \right. \right\} \\ &= \frac{1}{l^{(k-1)}} \{-1 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad 1 \quad 0 \quad 0\} \end{aligned} \quad (3.80)$$

### 4、单元线性刚度矩阵

一个有限单元具有一个特征矩阵, 即用于荷载——变形分析的刚度矩阵[42]。在求直线索单元的刚度矩阵时, 首先需要给出单元的本构关系。由于索单元一般只考虑材料的弹性阶段[8; 41; 51; 142; 156; 164], 而且绷紧的预应力索单元可看作空间铰接直线杆单元的一个特例[137; 142; 143], 因而其物理方程大为简化, 式(3.23)形式的物理方程便可直接采用 Hooke 定律表示[143; 156]:

$$\Delta S^{(k)} = E \cdot \Delta \varepsilon^{(k)} \quad (3.81)$$

式中,  $\Delta S^{(k)}$  和  $\Delta \varepsilon^{(k)}$  分别为索的轴向应力增量和应变增量;  $E$  为索的弹性模量。

单向受力直线索一般属于一维截面均匀单元, 把式(3.81)中的弹性模量  $E$  代入式(3.26), 可得直线索单元的线性刚度矩阵 $[k_{L,e}^{(k-1)}]$ 为:

$$\begin{aligned} [k_{L,e}^{(k-1)}] &= \int_{V^{(k-1)}} ([B_L]^T [D] [B_L]) dV^{(k-1)} \\ &= \int_{V^{(k-1)}} (\{B_L\}^T E \{B_L\}) dV^{(k-1)} \\ &= \frac{EA}{l^{(k-1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.82)$$

式中,  $\int_{V^{(k-1)}} dV^{(k-1)} = Al^{(k-1)}$ ,  $A$  为索的截面积, 随着杆件的伸长,  $A$  略微减小, 但在材料的弹性范围内,  $A$  的变化可以忽略不计, 保持常数, 即 Poisson 比为 0。

当一维单元承受轴向变形时其振型函数即假定模态  $\varphi_p$ 、 $\varphi_q$  与式(3.78)中的形函数相同时, 结构动力学中的轴向运动刚度系数为[158]:

$$k_{pq} = \int_0^{l^{(k-1)}} EA \varphi'_p \varphi'_q dx_1 \quad (3.83)$$

式中， $\phi'_p$ 、 $\phi'_q$ 表示分别对 $\phi_p$ 、 $\phi_q$ 求导。

不难得知，由式(3.82)求出的单元刚度矩阵与由式(3.83)组装得到的单元刚度矩阵是完全相同的。

## 5、单元初应力刚度矩阵

预应力直线索单元的初应力刚度矩阵是结构计算过程中一个非常重要的参数，本章在此首先采用传统方法对该矩阵进行推导，同时也采用另一种新方法——叠加方法进行推导。

### 1) 单元初应力刚度矩阵推导的传统方法

对于预应力直线索单元，由式(3.22)可求出直线索的 $[S^{(k-1)}]$ 矩阵为：

$$[S^{(k-1)}] = \begin{bmatrix} S_x^{(k-1)} & 0 & 0 \\ 0 & S_x^{(k-1)} & 0 \\ 0 & 0 & S_x^{(k-1)} \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

式中， $S_x^{(k-1)}$ 表示第 $k-1$ 次迭代后局部坐标系中 $x$ 轴上的单元应力。 $S_x^{(k-1)}$ 拉应力取为正，压应力取为负，本章下文中计算预应力引起的单元体力时，也有同样的规定。

根据式(3.20)和式(3.21)不难得知索单元的 $[G]$ 矩阵：

$$[G] = \begin{bmatrix} \frac{d(N_p)}{d(x^{(k-1)})} & 0 & 0 & \frac{d(N_q)}{d(x^{(k-1)})} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d(N_p)}{d(x^{(k-1)})} & 0 & 0 & \frac{d(N_q)}{d(x^{(k-1)})} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d(N_p)}{d(x^{(k-1)})} & 0 & 0 & \frac{d(N_q)}{d(x^{(k-1)})} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{l^{(k-1)}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

把式(3.84)和式(3.85)代入式(3.19)可得初应力刚度矩阵：

$$\begin{aligned}
 [k_{S,e}^{(k-1)}] &= \int_{V^{(k-1)}} ([G]^T [S^{(k-1)}] [G]) dV^{(k-1)} \\
 &= \frac{S_x^{(k-1)} A}{l^{(k-1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.86)
 \end{aligned}$$

轴向力对结构的刚度可能产生很大的影响，称之为轴向力的效应，而轴向力产生的刚度矩阵叫结构的几何刚度矩阵，结构最后的组合刚度矩阵中包括几何刚度矩阵部分[53]。由此可知，初应力刚度矩阵实际上就是文献[53]所提及的几何刚度矩阵。

## 2) 单元初应力刚度矩阵推导的新方法——叠加方法

直线索单元受力类似于桁架杆件，为了便于对式(3.86)作进一步的认识，本章采用文献[145]推导桁架单元切线刚度矩阵的方法再次对预应力直线索单元的初应力刚度矩阵进行推导。

把式(3.76)代入式(3.79)可得：

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{1}{l^{(k-1)}} (d_{x,q}^{(k)} - d_{x,p}^{(k)}) + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{l^{(k-1)}} (d_{x,q}^{(k)} - d_{x,p}^{(k)}) \right)^2 + \left( \frac{1}{l^{(k-1)}} (d_{y,q}^{(k)} - d_{y,p}^{(k)}) \right)^2 + \left( \frac{1}{l^{(k-1)}} (d_{z,q}^{(k)} - d_{z,p}^{(k)}) \right)^2 \right] \\
 &= \left\{ -\frac{1}{l^{(k-1)}} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{l^{(k-1)}} \quad 0 \quad 0 \right\} \{d_{pq}^{(k)}\} + \frac{1}{2} \left( \left\{ -\frac{1}{l^{(k-1)}} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{l^{(k-1)}} \quad 0 \quad 0 \right\} \{d_{pq}^{(k)}\} \right)^2 \\
 &+ \frac{1}{2} \left( \left\{ 0 \quad -\frac{1}{l^{(k-1)}} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{l^{(k-1)}} \quad 0 \right\} \{d_{pq}^{(k)}\} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \left\{ 0 \quad 0 \quad -\frac{1}{l^{(k-1)}} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{l^{(k-1)}} \right\} \{d_{pq}^{(k)}\} \right)^2 \quad (3.87)
 \end{aligned}$$

对式(3.87)求微分有：

$$\begin{aligned}
 d(\varepsilon_x) &= \left\{ -\frac{1}{l^{(k-1)}} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{l^{(k-1)}} \quad 0 \quad 0 \right\} d(\{d_{pq}^{(k)}\}) \\
 &+ \left\{ -\frac{1}{l^{(k-1)}} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{l^{(k-1)}} \quad 0 \quad 0 \right\} \{d_{pq}^{(k)}\} \left\{ -\frac{1}{l^{(k-1)}} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{l^{(k-1)}} \quad 0 \quad 0 \right\} d(\{d_{pq}^{(k)}\}) \\
 &+ \left\{ 0 \quad -\frac{1}{l^{(k-1)}} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{l^{(k-1)}} \quad 0 \right\} \{d_{pq}^{(k)}\} \left\{ 0 \quad -\frac{1}{l^{(k-1)}} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{l^{(k-1)}} \quad 0 \right\} d(\{d_{pq}^{(k)}\}) \\
 &+ \left\{ 0 \quad 0 \quad -\frac{1}{l^{(k-1)}} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{l^{(k-1)}} \right\} \{d_{pq}^{(k)}\} \left\{ 0 \quad 0 \quad -\frac{1}{l^{(k-1)}} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{l^{(k-1)}} \right\} d(\{d_{pq}^{(k)}\}) \quad (3.88)
 \end{aligned}$$

由式(3.88), 根据文献[145]可知:

$$\begin{aligned}
 \{B_N\} &= \left\{ -\frac{1}{l^{(k-1)}} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{l^{(k-1)}} \quad 0 \quad 0 \right\} \{d_{pq}^{(k)}\} \left\{ -\frac{1}{l^{(k-1)}} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{l^{(k-1)}} \quad 0 \quad 0 \right\} \\
 &+ \left\{ 0 \quad -\frac{1}{l^{(k-1)}} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{l^{(k-1)}} \quad 0 \right\} \{d_{pq}^{(k)}\} \left\{ 0 \quad -\frac{1}{l^{(k-1)}} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{l^{(k-1)}} \quad 0 \right\} \\
 &+ \left\{ 0 \quad 0 \quad -\frac{1}{l^{(k-1)}} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{l^{(k-1)}} \right\} \{d_{pq}^{(k)}\} \left\{ 0 \quad 0 \quad -\frac{1}{l^{(k-1)}} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{l^{(k-1)}} \right\} \\
 &= \{B_{N,x}\} + \{B_{N,y}\} + \{B_{N,z}\}
 \end{aligned} \tag{3.89}$$

式中,  $\{B_{N,x}\}$ 、 $\{B_{N,y}\}$ 、 $\{B_{N,z}\}$  分别表示由在局部坐标系  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴上产生的位移引起的在  $x$  轴产生的非线性应变刚度矩阵, 显而易见由式(3.89)可知这些应变矩阵具有叠加性。  $\{B_{N,x}\}$ 、 $\{B_{N,y}\}$ 、 $\{B_{N,z}\}$  分别表示如下:

$$\{B_{N,x}\} = \left( \frac{1}{l^{(k-1)}} \right)^2 (d_{x,q}^{(k)} - d_{x,p}^{(k)}) \{-1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0\} \tag{3.90}$$

$$\{B_{N,y}\} = \left( \frac{1}{l^{(k-1)}} \right)^2 (d_{y,q}^{(k)} - d_{y,p}^{(k)}) \{0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0\} \tag{3.91}$$

$$\{B_{N,z}\} = \left( \frac{1}{l^{(k-1)}} \right)^2 (d_{z,q}^{(k)} - d_{z,p}^{(k)}) \{0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 1\} \tag{3.92}$$

再根据文献[145], 且代入式(3.90)~式(3.92)可知:

$$\begin{aligned}
 & \int_{V^{(k-1)}} d\left(\{B_N\}^T\right) S_x^{(k-1)} dV^{(k-1)} \\
 &= \int_{V^{(k-1)}} d\left(\{B_{N,x}\}^T\right) S_x^{(k-1)} dV^{(k-1)} + \int_{V^{(k-1)}} d\left(\{B_{N,y}\}^T\right) S_x^{(k-1)} dV^{(k-1)} \\
 &+ \int_{V^{(k-1)}} d\left(\{B_{N,z}\}^T\right) S_x^{(k-1)} dV^{(k-1)} \\
 &= \frac{S_x^{(k-1)} A}{l^{(k-1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} d\left(\{d_{pq}^{(k)}\}\right) \\
 &+ \frac{S_x^{(k-1)} A}{l^{(k-1)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} d\left(\{d_{pq}^{(k)}\}\right) \\
 &+ \frac{S_x^{(k-1)} A}{l^{(k-1)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} d\left(\{d_{pq}^{(k)}\}\right) \\
 &= \frac{S_x^{(k-1)} A}{l^{(k-1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} d\left(\{d_{pq}^{(k)}\}\right) \tag{3.93}
 \end{aligned}$$

由文献[145]可知, 式(3.93)最后一个等式微分  $d\left(\{d_{pq}^{(k)}\}\right)$  前的矩阵即为预应力直线索单元的初应力刚度矩阵, 也即式(3.86)。由式(3.93)可知:

- ① 初应力刚度矩阵具有叠加性：它是由局部坐标系中  $\{B_{N,x}\}$ 、 $\{B_{N,y}\}$  和  $\{B_{N,z}\}$  引起的初应力刚度矩阵的叠加。
- ② 由上述推导过程，初应力刚度矩阵与非线性应变有关系，所以初应力刚度矩阵也叫非线性应变刚度矩阵[144; 146]。
- ③ 文献[144; 146]在分析平面桁架时认为，线性刚度矩阵就是局部坐标系中线性单元的刚度矩阵，这个矩阵并不定义对应于局部坐标系的横向增量位移的刚度，但可由非线性应变刚度矩阵导出线性刚度矩阵。该结论对索单元也成立，而且式(3.82)和式(3.93)中第一项由  $\{B_{N,x}\}$  引起的刚度矩阵是成比例的，所以有“由非线性应变刚度矩阵导出线性刚度矩阵”之说。
- ④ 文献[157]基于线弹性小变形假定对二维平面桁架做研究时，认为局部坐标系中垂直于杆轴的横向位移与单元刚度没有关系，因此横向位移与单元力也没有关系。而非线性大变形的与杆轴垂直的两个方向的横向位移却影响了单元刚度，即  $\{B_{N,x}\}$ 、 $\{B_{N,y}\}$  引起的刚度矩阵，当然与单元力也有关系。
- ⑤ 文献[42]认为  $[k_{S,e}^{(k-1)}]$  是应力刚化的度量，也是传统刚度矩阵(笔者注：实际上就是线性刚度矩阵)的扩展，它与材料属性无关，所以尽管存在各向异性和屈服它仍然适用。文献[42]在推导平面直杆单元的初应力矩阵，实际上也有式(3.93)类似结果，文中称之为附加项。

## 6、单元预应力的体力计算

把式(3.80)代入式(3.18)便得预应力引起的体力分量：

$$\{f_{S,e}^{(k-1)}\} = \int_{V^{(k-1)}} \left( \{B_L\}^T S_x^{(k-1)} \right) dV^{(k-1)} = S_x^{(k-1)} A \{-1 \ 0 \ 0 \mid 1 \ 0 \ 0\}^T \quad (3.94)$$

### 3.3.2.2 整体坐标系下预应力索单元的计算参数

3.3.2.1 对局部坐标下索单元的计算参数进行了详细分析。有限元分析需要转化到整体坐标系中，本章在此对整体坐标系下预应力索单元的计算参数进行详细推导。在计算完上述参数时，便可用直接刚度法建立起整个体系的平衡方程，然后用 3.2 节中介绍的非线性求解理论求解体系的响应。

#### 1、整体坐标系下的索单元线性刚度矩阵

直线索单元属于三维空间中的直线杆系单元。对于三维空间中的直线杆系单元，在每一端具有三个位移坐标，总共具有 6 个自由度，则式(3.27)的转换矩阵

公式简化成[156; 158]:

$$[T^{(k-1)}] = \begin{bmatrix} [\lambda] & | & [0] \\ \hline [0] & | & [\lambda] \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

式中 $[\lambda]$ 依然采用式(3.27)的形式。

把式(3.95)和式(3.82)代入式(3.30), 可得索单元在整体坐标系下的线性刚度矩阵为:

$$[K_{L,e}^{(k-1)}] = \frac{EA}{l^{(k-1)}} \begin{bmatrix} [K_{L,block}^{(k-1)}] & | & -[K_{L,block}^{(k-1)}] \\ \hline -[K_{L,block}^{(k-1)}] & | & [K_{L,block}^{(k-1)}] \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

式中,

$$[K_{L,block}^{(k-1)}] = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1 m_1 & l_1 n_1 \\ m_1 l_1 & m_1^2 & m_1 n_1 \\ n_1 l_1 & n_1 m_1 & n_1^2 \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

式(3.97)牵涉到了 $x$ 轴的方向余弦, 在整体坐标系中一维杆单元沿着单元轴线的单位向量可以采用直接余弦法表示成[157; 165]:

$$\lambda^{(e)} = \frac{1}{l^{(k-1)}} \left[ (X_q^{(k-1)} - X_p^{(k-1)})i + (Y_q^{(k-1)} - Y_p^{(k-1)})j + (Z_q^{(k-1)} - Z_p^{(k-1)})k \right] \quad (3.98)$$

$$= l_1 i + m_1 j + n_1 k$$

式中,  $l_1 = \frac{X_q^{(k-1)} - X_p^{(k-1)}}{l^{(k-1)}}$ ,  $m_1 = \frac{Y_q^{(k-1)} - Y_p^{(k-1)}}{l^{(k-1)}}$ ,  $n_1 = \frac{Z_q^{(k-1)} - Z_p^{(k-1)}}{l^{(k-1)}}$ ;  $(X_p^{(k-1)}, Y_p^{(k-1)}, Z_p^{(k-1)})$

和 $(X_q^{(k-1)}, Y_q^{(k-1)}, Z_q^{(k-1)})$ 分别为第 $k-1$ 次迭代后 $p$ 、 $q$ 节点在整体坐标系中的坐标。

式(3.95)所用到的坐标转换矩阵 $[T^{(k-1)}]$ 为方阵, 实际上为了简化计算, 转换矩阵 $[T^{(k-1)}]$ 也可以采用长方形矩阵形式, 矩阵 $[k_{L,e}^{(k-1)}]$ 也要进行相应的变化, 文献[157]在推导三维桁架的线性刚度矩阵(笔者注: 不难得知直线索单元同样可采用此种方法求解整体坐标系下的线性刚度矩阵)时进行了详细的阐述:

$$[T^{(k-1)}] = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_1 & m_1 & n_1 \end{bmatrix} \quad (3.99)$$

$$[k_{L,e}^{(k-1)}] = \frac{EA}{l^{(k-1)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.100)$$

在此指出的是, 计算方案二和三是根据线性位移时程的结果来计算单元轴力的线性时程部分的, 其中在求局部坐标系下的单元杆端力(即单元轴力)时, 所用到的转换矩阵便是式(3.99), 不过在求整体坐标系下的单元杆端力时, 所用到的单元刚度矩阵依然是式(3.96)和初应力刚度矩阵的新形式(见本章下文)二者之和。

## 2、整体坐标系下的索单元初应力刚度矩阵

在一般的文献中,整体坐标系下索单元的初应力刚度矩阵与三个局部坐标轴的方向余弦均有关系,本章称之为初应力刚度矩阵的传统形式,这使得该矩阵的计算变得比较繁琐。本小节将采用严格的数学公式推导出索单元初应力刚度矩阵新的表达形式,本章称之为初应力刚度矩阵的新形式,该形式与局部坐标轴的方向余弦没有关系,从而使得初应力刚度矩阵的计算大为简化。

### 1) 初应力刚度矩阵的传统形式

在推导初应力刚度矩阵的传统形式时,常常借助式(3.31)直接推导。为了对传统形式做进一步的认识,本小节也采用新方法——叠加方法对其进行了推导。

#### (1) 传统形式的直接推导

当坐标转换矩阵为方阵时,同样把式(3.95)和式(3.86)代入式(3.31),可得索单元在整体坐标系下的初应力刚度矩阵为[143]:

$$\left[ K_{S,e}^{(k-1)} \right] = \frac{S_x^{(k-1)} A}{l^{(k-1)}} \left[ \begin{array}{c|c} \left[ K_{S,block}^{(k-1)} \right] & -\left[ K_{S,block}^{(k-1)} \right] \\ \hline -\left[ K_{S,block}^{(k-1)} \right] & \left[ K_{S,block}^{(k-1)} \right] \end{array} \right] \quad (3.101)$$

式中:

$$\left[ K_{S,block}^{(k-1)} \right] = \begin{bmatrix} l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 & l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3 & l_1 n_1 + l_2 n_2 + l_3 n_3 \\ m_1 l_1 + m_2 l_2 + m_3 l_3 & m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 & m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 \\ n_1 l_1 + n_2 l_2 + n_3 l_3 & n_1 m_1 + n_2 m_2 + n_3 m_3 & n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 \end{bmatrix} \quad (3.102)$$

本章把式(3.101)构成的矩阵称之为初应力刚度矩阵的传统形式。

#### (2) 传统形式的新方法——叠加方法推导

不难由式(3.93)的推导过程得知,在局部坐标系中 $\{B_{N,x}\}$ 、 $\{B_{N,y}\}$ 、 $\{B_{N,z}\}$ 引起的初应力刚度矩阵分量分别为式(3.93)第二个等式微分 $d\left(\{d_{pq}^{(k)}\}\right)$ 前面的矩阵。为了对式(3.101)作进一步的认识,下面同样采用前述坐标变换不难把这三个初应力刚度矩阵分量转换到整体坐标系中,分别表示为 $\left[ K_{S,e,x}^{(k-1)} \right]$ 、 $\left[ K_{S,e,y}^{(k-1)} \right]$ 、 $\left[ K_{S,e,z}^{(k-1)} \right]$ :

$$\left[ K_{S,e,x}^{(k-1)} \right] = \frac{S_x^{(k-1)} A}{l^{(k-1)}} \left[ \begin{array}{c|c} \left[ K_{S,block,x}^{(k-1)} \right] & -\left[ K_{S,block,x}^{(k-1)} \right] \\ \hline -\left[ K_{S,block,x}^{(k-1)} \right] & \left[ K_{S,block,x}^{(k-1)} \right] \end{array} \right] \quad (3.103)$$

$$\left[ K_{S,e,y}^{(k-1)} \right] = \frac{S_x^{(k-1)} A}{l^{(k-1)}} \left[ \begin{array}{c|c} \left[ K_{S,block,y}^{(k-1)} \right] & -\left[ K_{S,block,y}^{(k-1)} \right] \\ \hline -\left[ K_{S,block,y}^{(k-1)} \right] & \left[ K_{S,block,y}^{(k-1)} \right] \end{array} \right] \quad (3.104)$$



$$\left[ K_{S,e,z}^{(k-1)} \right] = \frac{S_x^{(k-1)} A}{l^{(k-1)}} \left[ \begin{array}{c|c} \left[ K_{S,block,z}^{(k-1)} \right] & -\left[ K_{S,block,z}^{(k-1)} \right] \\ \hline -\left[ K_{S,block,z}^{(k-1)} \right] & \left[ K_{S,block,z}^{(k-1)} \right] \end{array} \right] \quad (3.105)$$

在式(3.103)~式(3.105)中:

$$\left[ K_{S,block,x}^{(k-1)} \right] = \left[ K_{L,block}^{(k-1)} \right] = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1 m_1 & l_1 n_1 \\ m_1 l_1 & m_1^2 & m_1 n_1 \\ n_1 l_1 & n_1 m_1 & n_1^2 \end{bmatrix} \quad (3.106)$$

$$\left[ K_{S,block,y}^{(k-1)} \right] = \begin{bmatrix} l_2^2 & l_2 m_2 & l_2 n_2 \\ m_2 l_2 & m_2^2 & m_2 n_2 \\ n_2 l_2 & n_2 m_2 & n_2^2 \end{bmatrix} \quad (3.107)$$

$$\left[ K_{S,block,z}^{(k-1)} \right] = \begin{bmatrix} l_3^2 & l_3 m_3 & l_3 n_3 \\ m_3 l_3 & m_3^2 & m_3 n_3 \\ n_3 l_3 & n_3 m_3 & n_3^2 \end{bmatrix} \quad (3.108)$$

再由式(3.102)和式(3.106)~式(3.108)对比可知:

$$\left[ K_{S,block}^{(k-1)} \right] = \left[ K_{S,block,x}^{(k-1)} \right] + \left[ K_{S,block,y}^{(k-1)} \right] + \left[ K_{S,block,z}^{(k-1)} \right] \quad (3.109)$$

由式(3.103)~式(3.105)可知,  $\left[ K_{S,e,x}^{(k-1)} \right]$ 、 $\left[ K_{S,e,y}^{(k-1)} \right]$ 、 $\left[ K_{S,e,z}^{(k-1)} \right]$  都仅与各自位移对应的局部坐标轴的方向余弦有关, 而与其它局部坐标轴的方向余弦没有任何关系。这说明在三轴正交的 Descartes 坐标系中, 直线杆件的方向余弦对初应力刚度矩阵的影响是相互独立的, 因而求解整体坐标系中总初应力刚度矩阵时, 可以把局部坐标系中的各个初应力刚度矩阵变换到整体坐标系中再进行叠加即可。

## 2) 初应力刚度矩阵的新形式

由式(3.101)可知初应力刚度矩阵的传统形式与局部坐标轴的三个方向余弦有关, 文献[143]对这些方向余弦进行了详细的阐述, 不过计算起来非常繁琐。而文献[144; 146; 150]在求解二节点平面桁架单元时均指出初应力刚度矩阵独立于杆的方向, 与单元的方位无关, 即单元在局部坐标系中的初应力刚度矩阵和整体坐标系中的初应力刚度矩阵是相等的。但遗憾的是文献[144; 146; 150]并没有给出三维空间中的二力杆单元初应力刚度矩阵的类似结论。本章在此将用高等数学的知识来阐明单元初应力刚度矩阵的传统形式实际上与局部坐标轴的方向余弦无关。

设两个单位向量  $a = \{a_x, a_y, a_z\}$ ,  $b = \{b_x, b_y, b_z\}$ , 则  $a, b$  的内积或数量积表示为:

$$dot = a^T b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (3.110)$$

如果  $a, b$  互相垂直(即正交), 则有  $dot = 0$ ; 如果  $a = b$ , 则有  $dot = 1$ 。

在式(3.102)中, 每一个元素均可以看作三个单位向量  $\{l_1, l_2, l_3\}$ 、 $\{m_1, m_2, m_3\}$ 、 $\{n_1, n_2, n_3\}$  自身或彼此之间的内积。同时由式(3.28)可知这三个向量就是该矩阵中的列向量, 而此时的列向量反过来可以看成是三个相互垂直的整体坐标轴在局部坐标系中的方向余弦, 因此由式(3.110)不难把式(3.102)简化成:

$$\left[ K_{S,block}^{(k-1)} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.111)$$

由式(3.86)、式(3.101)和式(3.111)可知, 整体坐标系下的单元初应力刚度矩阵和局部坐标系下的单元初应力刚度矩阵是完全一样的, 本章对式(3.111)构成的单元初应力刚度矩阵称为初应力刚度矩阵的新形式。

### 3、预应力体力的计算

把式(3.95)和式(3.94)代入式(3.34), 可得整体坐标系中由预应力产生的体力分量为[143]:

$$\left\{ F_{S,e}^{(k-1)} \right\} = S_x^{(k-1)} A \left\{ -l_1 \quad -m_1 \quad -n_1 \mid l_1 \quad m_1 \quad n_1 \right\}^T \quad (3.112)$$

#### 3.3.3 具有几何非线性特征的大跨屋盖找形分析中的有关理论

传统刚性结构的平衡几何位形在设计之初通常是知道的, 但是张拉结构并非如此。索材料和膜材料的抗弯刚度、抗剪刚度和抗压刚度都很小, 在引进预应力之前, 张拉结构的几何位形是不确定的, 建造这类结构时就需要一直施加较大的预应力, 否则对于张拉结构, 即使不考虑外荷载作用以及忽略结构自重时, 也没有一个合适的、无应力的位形, 因此对于张拉结构, 设计者必须要规定一个特殊的、满足平衡法则的参考位形[137; 153]。除满足平衡条件外, 参考位形也必须适应建筑、结构和建造的要求[51; 166]。

上述参考位形不是先天就有的形状, 它通常不能用简单的数学函数和几何模型来描述, 需要设计者进行一个叫做找形也就是找到仅在预应力作用下结构的基本静力形态的过程来完成, 这就能把张拉结构同传统刚性结构区分开来[137; 153]。找形也叫成形、初始平衡问题[167]、初始平衡构型[45]或初始几何形状的确立[142]。

找形是张拉结构设计过程中的起点, 它一般先于结构的静力和动力分析, 通常找形将产生出最佳的结构形状, 该形状能够满足功能要求并且能以最小成本来满足结构耐久性和强度要求[153]。张拉结构的形状严重依赖于内力, 而形状反过来也控制和影响着结构的荷载承载能力, 结构受力性能和结构外形不能分割开, 因此找形的过程要求设计者找到一个在形状、承载能力和建筑需要三者之间

的最优折衷方案[137]。

张拉结构的初始平衡问题(即找形)有三种类别[45]: ①表面形状是给定的但内力是待定的; ②内力是给定的但是表面形状是待定的; ③表面形状和内力都是待定的。但本章只研究第②种情况的初始平衡问题, 此时的找形过程是一个可逆的结构问题, 在此过程中, 给定的应力分布是促使结构变形的驱动参数[137], 而一般情况下力却是结构变形后产生的响应, 因而找形是一个逆问题[168]。

由于张拉结构在制作和建造过程中存在一些潜在的精度问题, 因此确保找形计算尽可能精确便显得至关重要, 在结构制作中的整体误差也会保持在一个最小的范围之内[153]。目前, 张力结构的找形方法有瞬时刚度法、支座移动法、力密度法、格栅方法、动力松弛法、杆长修正法、控制点逼近法、比拟法、最小表面法和不均匀应力表面法等, 文献[51; 137; 153; 169; 170; 171]等对这些方法进行了全面的阐述。不过在现代结构分析中, 有限元理论(即刚度方法)占据着主导地位并得到广泛的应用[137; 153], 文献[142]认为在分析诸如索梁、索网这样的高次超静定结构时, 用有限元理论比较简单而且适用, 因此本章将采用 UL 格式对预应力鞍形索网屋盖进行找形分析。

### 3.3.3.1 找形时的非线性有限元理论

本章前文已对非线性的有限元静力计算理论进行了一般意义上的概述, 本小节在此基础上对预应力索网屋盖在找形时将用到的非线性有限元理论进行具体的、有针对性的介绍。

#### 1、找形时的平衡方程

对悬索屋盖找形时, 可以忽略结构自重和外荷载的作用, 在变形过程中结构的应力大小始终为初始预应力, 即不考虑本构关系的影响[143]。Lewis 也认为不象静力分析阶段那样, 找形过程不需要考虑弹性效应[153]。由式(3.35)可得出找形时基于 UL 格式的静力平衡方程为[143]:

$$\left[ K_S^{(k-1)} \right] \{ \Delta D^{(k)} \} = - \{ F_S^{(k-1)} \} \quad (3.113)$$

不过文献[138; 143]指出: 当直接求解式(3.113)时, 由于  $\left[ K_S^{(k-1)} \right]$  矩阵可能出现奇异, 从而造成解的漂移, 经验做法是考虑线性刚度矩阵, 但将材料常数(即弹性模量)取为很小的值(一般为真实材料常数的  $10^{-4} \sim 10^{-6}$  倍), 再根据下式求解节点位移[143]:

$$\left( \left[ K_L^{(k-1)} \right] + \left[ K_S^{(k-1)} \right] \right) \{ \Delta D^{(k)} \} = - \{ F_S^{(k-1)} \} \quad (3.114)$$

文献[143]已经对数值分析的精确性进行了检验, 证明了上述找形方法是正确的和可靠的。

## 2、找形流程

为了对张拉结构进行更加精确地找形，需要进行迭代计算，这意味着找形是一个结构表面形状逐步调整的过程，直到静力平衡状态和结构中的预应力水平协调一致为止[153]，对式(3.113)或式(3.114)的数值求解依然采用 Newton 法进行。

在找形时，需要假定一个结构的初始猜测位形。一般来说，结构的初始猜测位形不能产生静力平衡，因此结构不会处于平衡状态，将会出现不平衡力，在此不平衡力作用下，节点要产生新的位移，于是结构又要产生新的位形和新的不平衡力，然后再次引起新位移，依次类推，直到迭代满足收敛条件为止，这时的位形才是真正的结构位形。图 3.2 给出悬索屋盖找形的流程。

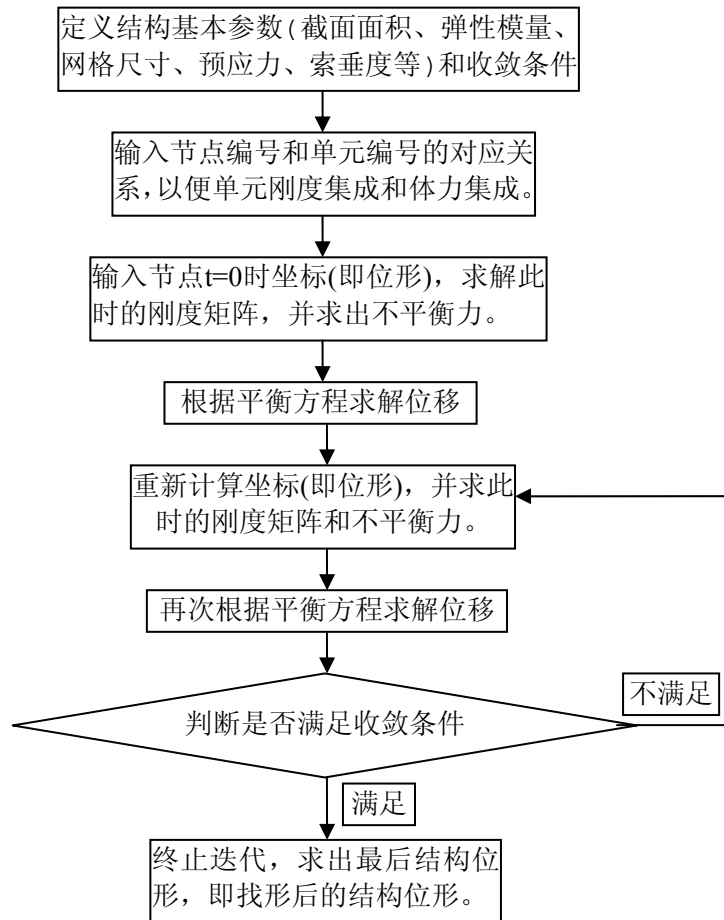


图 3.2 预应力鞍形索网屋盖找形的流程

虽然文献[153]指出不平衡力为零时的位形才是张拉屋盖的找形结果，但是根据此要求进行找形时，由第 4 章可知迭代步数常常较多；而根据位移收敛条件进行找形时，迭代步数往往较少，但是不平衡力较大。因此第 4 章在找形时采用能量收敛准则，迭代步数常常较少，同时不平衡力较小，其收敛条件表示如下：

$$\left\{ R \left\{ D^{(k-1)} \right\} \right\}^T \left\{ D^{(k)} \right\} \leq e_w \quad (3.115)$$

式中,  $\{R\{D^{(k-1)}\}\}$  表示产生最后一个位移  $\{D^{(k)}\}$  前一刻位形引起的不平衡力;  
 $e_w$  表示能量容差。

### 3.4 本章小结

本章主要结合经典的几何非线性有限元理论对预应力鞍形索网屋盖的相关计算内容进行了阐述, 为第4章的具体计算奠定坚实的理论基础。概括起来得到了如下结论:

- 1) 整体坐标系下的单元初应力刚度矩阵具有叠加性, 可以采用叠加方法对其进行推导。
- 2) 整体坐标系下的单元初应力刚度矩阵与局部坐标轴的方向余弦没有关系, 在两种坐标系下该矩阵的形式是完全一样的, 从而使得初应力刚度矩阵的计算大为简化。

## 第 4 章 大跨度屋盖几何非线性问题的应用研究

### 4.1 引言

第 3 章已经对几何非线性基础理论和预应力鞍形索网屋盖的几何非线性基础理论进行了必要的阐述,本章将根据第 3 章的内容对几何非线性特征明显的预应力鞍形索网屋盖设计过程中的找形和风致响应两个方面进行研究。

本章首先对结构进行找形,为结构风致响应计算做好铺垫。然后采用三种不同计算方案计算风致响应时程。本章的分析框图见图 4.1。

本章的主要创新点在于:结合结构特性和风荷载特性,同时采用了三种不同的计算方案计算了结构风致响应,系统分析了三种方案计算结果的差异,获得了采用近似计算方案时可以把结构的风致响应看成是在平均风荷载引起的几何非线性响应基础上叠加脉动风荷载引起的线性响应的结果。

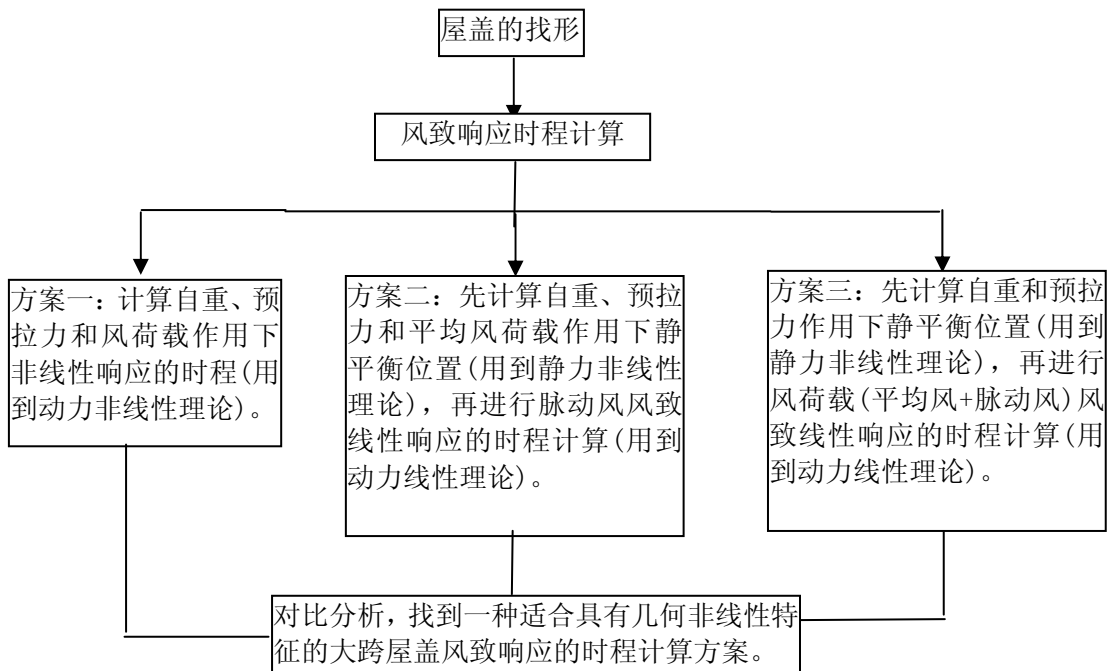


图 4.1 第 4 章分析框图

### 4.2 具有几何非线性特征的大跨屋盖的找形分析

本章将利用第 3 章介绍的相关理论采用 MATLAB 编程,对具有几何非线性特征的预应力鞍形索网屋盖的找形进行分析。

#### 4.2.1 结构概况

对一支撑在直线刚性边梁上的空间预应力直线菱形索网屋盖进行找形分析。结构概况如下：找形前结构体系在  $XOY$  平面内的投影和结构节点布置见图 4.2 和图 4.3；结构跨度为 40m，网格尺寸为  $DL \times DL = 4.0\text{m} \times 4.0\text{m}$ ，令  $Y$  方向为上凸的稳定索和  $X$  方向为下凹的承重索；屋盖低点与地面高差 6m，高点与地面高差为 16m，索垂度为 5m。

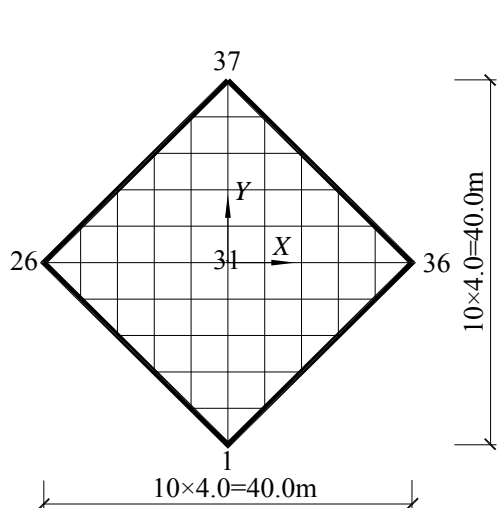
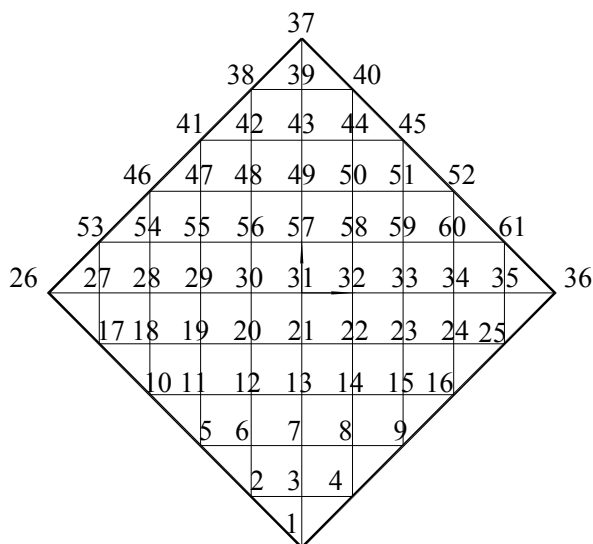
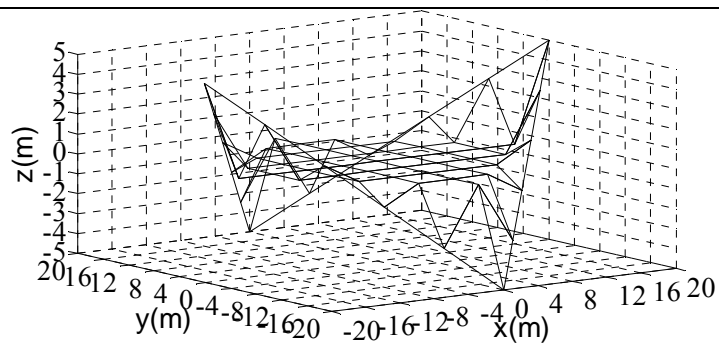
图 4.2 结构在  $XY$  平面内的投影

图 4.3 结构节点布置

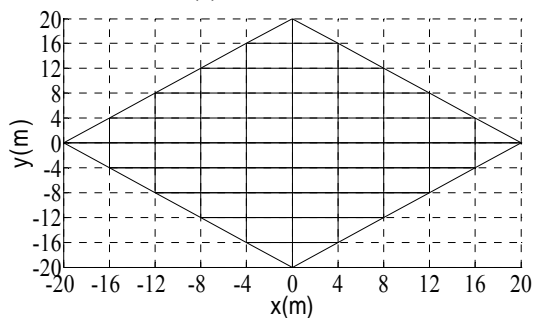
### 4.2.2 初始猜测位形和找形后位形

找形前时刻  $t = 0$  的初始猜测位形(即坐标)见图 4.4：①节点 31 与整体坐标系的原点重合，不难由图 4.2 和图 4.3 求出所有节点在  $XY$  平面内的坐标；②对于张拉结构，一般采用最小表面形状作为最优化结构形式，其中平面形状是最小表面形状之一，也是一种最简单的形状，但是平面形状并不真正是一个好选择，因为它们的横向刚度很小，为了限制变形，必须施加很高的预应力[153]，所以张拉结构常常采用弯曲形状的表面，这其中需要对边界条件进行约束，在本结构中，直线刚性边梁上的边节点在  $Z$  轴上的坐标不完全为零，其中节点 1、26、37 和 36 在  $Z$  轴上的坐标分别为 -5m、5m、-5m 和 5m，其余边节点在  $Z$  轴上的坐标不难根据线性插值求得；③内部节点在  $Z$  轴上的坐标都为零。

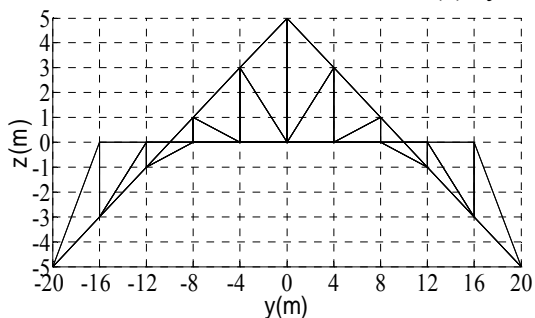
本章基于第 3 章所述有限元理论，采用 MATLAB 编程，分别用式(3.113)和式(3.114)对该索网找形，结果相差很小，因而在此仅给出用式(3.113)进行找形的结果，找形后的结构位形见图 4.5。



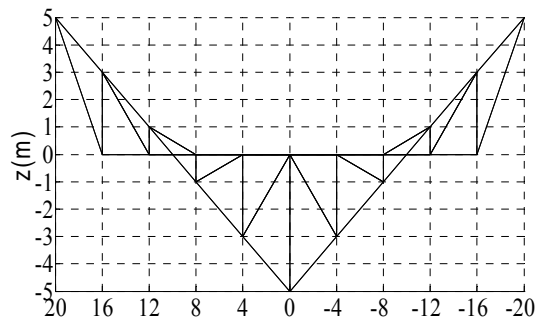
(a) 空间位形



(b) xy 平面内的投影

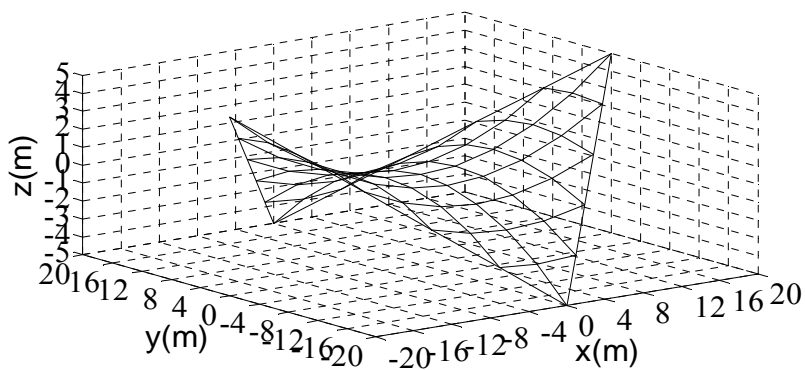


(c) yz 平面内的投影



(d) xz 平面内的投影

图 4.4 找形前结构初始猜测位形



(a) 空间位形



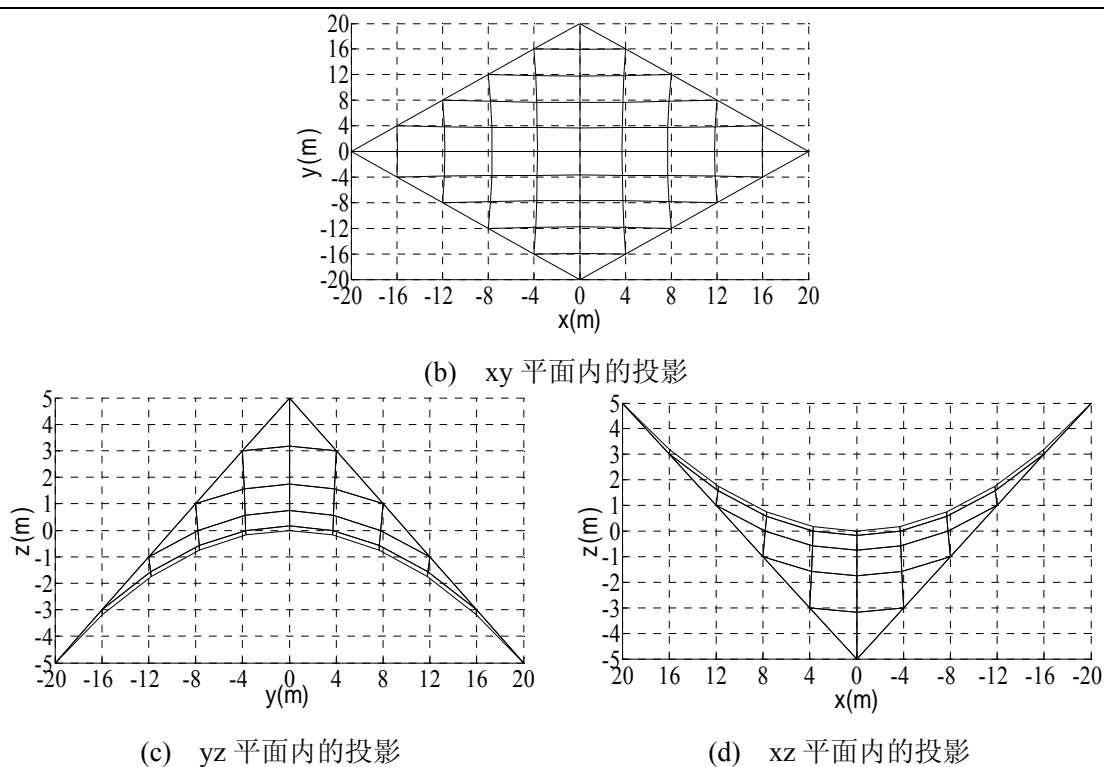


图 4.5 找形后结构位形

### 4.2.3 结构找形分析

首先在此需要说明的是, 不难由式(3.113)可知预拉力大小对结构找形没有影响, 不过为了满足 3.3.1 节中的基本假定 5), 本章在找形过程中给定的所有单元预拉力大小始终为  $S_x^{(k-1)} = 50\text{kN}$ 。此外本章在找形时用的收敛条件为能量容差  $e_w = 1 \times 10^{-4} \text{N.m}$  (见式(3.115))。

#### 4.2.3.1 结构位形分析

首先分析一下找形后整体结构的位形情况, 由图 4.5 可知找形后结构位形为马鞍形。正如文献[153]指出: 在施加静力荷载和动力荷载之前, 如果初始表面处于常值应力状态时, 结构形状便会是一个马鞍形, 其曲率是相等的或相反的, 凸起方向索(即稳定索)的应力与下垂方向索(即承重索)的应力的比值等于一, 张拉结构的最优形态便是马鞍形。同时文献[52]也指出: 索网曲率必须是马鞍形以确保结构有着足够的刚度, 应当避免出现具有局部平面的索网, 否则结构容易发生振动。

上面对找形后的整体结构的位形情况进行了分析, 下面对部分节点的位形(即坐标)变化情况进行详细分析。因为结构和荷载具有对称性, 可以取出图 4.3 中第一象限内的内部节点在找形前、后的坐标值来定量分析结构位形的变化规律, 见表 4.1。

表 4.1 结构第一象限内的内部节点在找形前后的坐标值(单位: m)

| 节点<br>坐标 | 找形前   | 找形后     | 相对变化值       | 找形前   | 找形后     | 相对变化值       | 找形前   | 找形后     | 相对变化值       |
|----------|-------|---------|-------------|-------|---------|-------------|-------|---------|-------------|
|          | $x_0$ | $x_l$   | $x_l - x_0$ | $y_0$ | $y_l$   | $y_l - y_0$ | $z_0$ | $z_l$   | $z_l - z_0$ |
| 31       | 0     | 0       | 0           | 0     | 0       | 0           | 0     | 0       | 0           |
| 32       | 4     | 3.6940  | -0.3060     | 0     | 0       | 0           | 0     | 0.1756  | 0.1756      |
| 33       | 8     | 7.6620  | -0.3380     | 0     | 0       | 0           | 0     | 0.7450  | 0.7450      |
| 34       | 12    | 11.7823 | -0.2177     | 0     | 0       | 0           | 0     | 1.7418  | 1.7418      |
| 35       | 16    | 15.9327 | -0.0673     | 0     | 0       | 0           | 0     | 3.1700  | 3.1700      |
| 57       | 0     | 0       | 0           | 4     | 3.6940  | -0.3060     | 0     | -0.1756 | -0.1756     |
| 58       | 4     | 3.7108  | -0.2892     | 4     | 3.7108  | -0.2892     | 0     | 0       | 0           |
| 59       | 8     | 7.6957  | -0.3043     | 4     | 3.7652  | -0.2348     | 0     | 0.5695  | 0.5695      |
| 60       | 12    | 11.8333 | -0.1667     | 4     | 3.8612  | -0.1388     | 0     | 1.5674  | 1.5674      |
| 49       | 0     | 0       | 0           | 8     | 7.6620  | -0.3380     | 0     | -0.7450 | -0.7450     |
| 50       | 4     | 3.7652  | -0.2348     | 8     | 7.6957  | -0.3043     | 0     | -0.5695 | -0.5695     |
| 51       | 8     | 7.8056  | -0.1944     | 8     | 7.8056  | -0.1944     | 0     | 0       | 0           |
| 43       | 0     | 0       | 0           | 12    | 11.7823 | -0.2177     | 0     | -1.7418 | -1.7418     |
| 44       | 4     | 3.8612  | -0.1388     | 12    | 11.8333 | -0.1667     | 0     | -1.5674 | -1.5674     |
| 39       | 0     | 0       | 0           | 16    | 15.9327 | -0.0673     | 0     | -3.1700 | -3.1700     |

由于结构对称和荷载对称,由表 4.1 可知:①位于原点的节点 31 为曲面拐点,找形前后该点坐标始终未变;②位于  $x$  轴上节点 32~35 在  $y$  轴上的坐标始终未变,四个节点离坐标原点越远在  $z$  轴上产生的相对位移越大,但是在  $x$  轴上产生的相对位移并不是离坐标原点越远而越大,它们各不相同;③位于  $y$  轴上节点 57、49、43 和 39 在  $x$  轴上的坐标始终未变,四个节点离坐标原点越远在  $z$  轴上产生的相对位移越大,但是在  $y$  轴上产生的相对位移也并不是离坐标原点越远而越大,它们各不相同;④节点 58~60 在  $y$  轴上的坐标发生变化,离坐标原点越远,在  $y$  轴上产生的相对位移越小,而在  $z$  轴上产生的相对位移越大,但是在  $x$  轴上产生的相对位移特点依然同第②点;⑤节点 58、50 和 44 在  $x$  轴上的坐标发生变化,离坐标原点越远,在  $x$  轴上产生的相对位移越小,而在  $z$  轴上产生的相对位移越大,但是在  $y$  轴上产生的相对位移特点依然同第③点;⑥与  $xy$  平面上对称轴成 45 度斜线上的节点 31、58 和 51 在  $z$  轴上的坐标始终为 0,找形前后在  $x$  轴和  $y$  上的坐标相等,使得该斜线成为结构位形在  $xy$  平面内投影的又一条对称线;⑦当第⑥条中的在平面内的对称斜线应用到空间中时,关于该线对称的节点在找形后的位移和坐标却是反对称的,因而结构找形后才有可能成为马鞍形屋

面,这是有别于坐标轴的特殊之处,因为坐标轴无论关于平面还是空间都是正对称的。例如节点 60 存在:  $x_l = 11.8333$ ,  $x_l - x_0 = -0.1667$ ,  $y_l = 3.8612$ ,  $y_l - y_0 = -0.1388$ ,  $z_l = 1.5674$ ,  $z_l - z_0 = 1.5674$ 。而节点 44 存在:  $x_l = 3.8612$ ,  $x_l - x_0 = -0.1388$ ,  $y_l = 11.8333$ ,  $y_l - y_0 = -0.1667$ ,  $z_l = -1.5674$ ,  $z_l - z_0 = -1.5674$ 。

综上所述,结构变化情况的总特点是:①找形前后,结构位形在  $x$ 、 $y$ 轴上变化复杂,在  $z$ 轴上变化简单;②由于节点在找形前后产生不同的相对位移,因而找形后网格发生畸变,使得非坐标轴上的正交索单元在  $xy$ 平面内的投影与网格线存在一定程度的偏移,相对位移越大,网格畸变越严重。

#### 4.2.3.2 节点位移、节点不平衡力和能量的分析

当能量容差取为  $1 \times 10^{-4}$  时,方程迭代了 147 次便达到收敛条件。由于节点个数较多,本章首先在此给出所有内部节点三个方向的位移向量模、不平衡力向量模和能量与迭代次数的关系,见图 4.6。同时给出部分迭代次数中的位移向量模、不平衡力向量模和能量大小,见表 4.2。

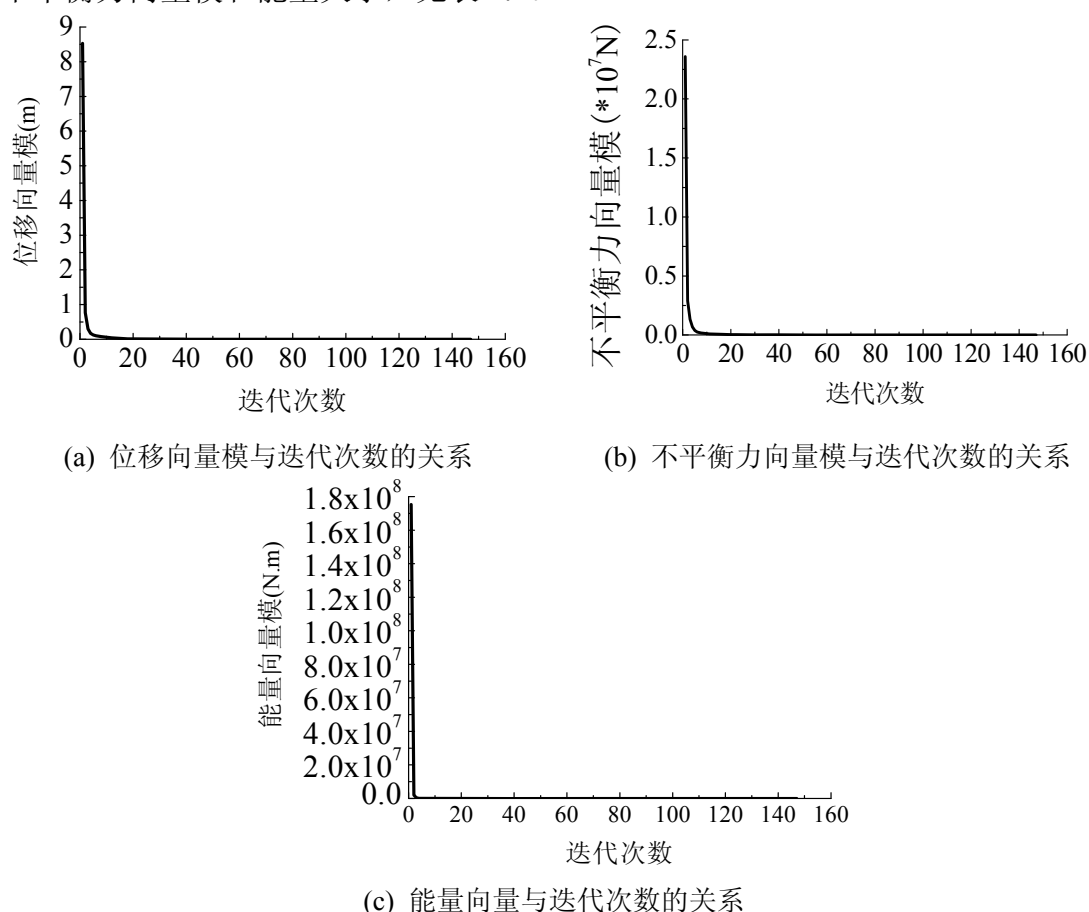


图 4.6 节点位移、节点不平衡力和能量与迭代次数的关系

表 4.2 迭代计算中的位移向量模、不平衡力向量模和能量

| 迭代次数 | 位移向量模(m)  | 不平衡力向量模(N) | 能量(N·m)   |
|------|-----------|------------|-----------|
| 1    | 8.5295    | 2.3597e7   | 1.7540e8  |
| 2    | 0.7693    | 2.8954e6   | 1.9992e6  |
| 3    | 0.2999    | 1.3348e6   | 3.7033e5  |
| ⋮    | ⋮         | ⋮          | ⋮         |
| 95   | 9.7686e-5 | 364.2509   | 0.0342    |
| ⋮    | ⋮         | ⋮          | ⋮         |
| 147  | 5.0614e-6 | 18.8828    | 9.2005e-5 |

在给定收敛条件下,用基于 UL 格式的 Newton 法求解方程时,由图 4.6 和表 4.2 可知:①位移、不平衡力和能量在较低的迭代次数时收敛较快,而在较高的迭代次数时收敛较慢,这说明开始几次的位形与真实位形相差甚远,随着迭代次数的增加,所得位形逐步向真实位形靠近,同时也说明开始几次的预应力分布状态与平衡力分布状态相差甚远,随着迭代次数的增加,预应力分布状态逐步向平衡力分布状态靠近;②迭代次数越多,网格畸变越厉害,但成形后索的拉力越均匀,位移也越小;③当迭代次数为 3 时,位移模已经较小了,而不平衡力模还是比较大,虽然和第一次值相比较小,即使迭代次数为 95 次(位移容差为 $1 \times 10^{-4}$ )时,不平衡力还为 364.2509N,所以位移收敛速度快于不平衡力收敛速度;④由表 4.2 不难得知,如果采用力收敛条件,采用相同数值的收敛容差,其迭代次数将远远大于位移收敛和能量收敛的迭代次数,虽然精度得到一定程度的提高,不过当收敛容差取值很小时,只要满足不平衡力收敛,位移收敛和能量收敛会自动满足。据上所述,笔者认为用 Newton 法对索网屋盖找形时宜采用能量收敛准则来判断迭代是否收敛。

由于结构和荷载均对称,在每次迭代完成后,内部节点的位移和不平衡力均存在以下特点:①关于  $x$  轴和  $y$  轴对称的内部节点的位移和不平衡力也是正对称的,正如结构力学谈到对称结构在对称荷载作用下的响应是正对称的;②节点 31 是结构上所有节点位移和不平衡力对称转折点,因而该处的不平衡力和位移始终为零;③与  $x$  轴和  $y$  轴成 45 度斜线上的节点 31、58 和 51 在  $z$  轴上的位移和不平衡力始终为 0,在  $x$  轴和  $y$  上的位移和不平衡力相等,因此该斜线成为结构位移和不平衡力在  $xy$  平面内的又一条对称线;④与 45 度斜线对称的节点的位移和不平衡力是关于该线反对称的;⑤位于  $x$  轴上的节点 32、33、34 和 35 在  $x$  轴和  $z$  轴上产生不平衡力和位移,在  $y$  轴上不产生不平衡力和位移,同样位于  $y$  轴上节点 57、49、43 和 39 在  $y$  轴和  $z$  轴上产生不平衡力和位移,在  $x$  轴上不产生不平衡力和位移。此外由本章前文结构位形分析可知,上述这些迭代过程中的特

点基本和位形中的特点是一脉相承的，正因为位移和不平衡力有了这些特点，才导致位形出现相似的特征。

### 4.3 具有几何非线性特征的大跨屋盖的风致响应计算

本小节将根据第3章理论采用 MATLAB 编程，对一支撑在直线刚性边梁上的在进行结构找形后的空间预应力鞍形索网屋盖的风致响应进行计算。

#### 4.3.1 结构概况和风洞试验概况

结构跨度为 40m，网格尺寸为  $DL \times DL = 2.0\text{m} \times 2.0\text{m}$ ，节点布置见图 4.7。令  $Y$  方向为上凸的稳定索和  $X$  方向为下凹的承重索；屋盖低点与地面高差 6m，高点与地面高差为 16m，索垂度为 5m；由图 4.7 可知结构有 400 个单元和 543 个自由度(内部非约束节点数为 181 个)。

大跨度索网结构由于表面流动分离及再附等湍流特征的影响，其风压分布特性非常复杂，风荷载具有非定常性，风洞实验提供了测量非定常风荷载的手段。本章风荷载试验数据取自文献[33]中的底部封闭的鞍形膜结构的风洞试验同步测压结果，限于篇幅和为了便于计算，本章在此只介绍一些必要的实验资料。

试验中模拟了 B、D 两种地貌，限于篇幅，本章仅对 B 类地貌进行研究，其梯度风高度  $Z_G = 350\text{m}$ ，地貌粗糙度系数  $\alpha = 0.16$  [62]。试验中测压模型为刚性模型，见图 4.8，试验中为了最大限度地消除风洞试验段的地面对流场的影响，制作了一个高度为 0.4 米的圆台，试验模型置于圆台上[33]。因为结构对称，风向角测量范围为 0 度~90 度，风向角间隔为 15 度。在模型内外表面上，各布置 81 个对应的测压点，共 182 个测点，测点布置如图 4.9 所示。图中 L 和 H 分别表示鞍型曲面的低点和高点，即 H-H 方向为下凹的承重索，L-L 方向为上凸的稳定索。风洞测压试验的参考风速为 13m/s，试验参考点选在高度为 1 米处，该高度在缩尺比为 1/50 的情况下对应于实际高度 50m。测压信号采样频率为 312.5Hz，每个测点采样样本的总长为 6000 个数据。风压符号的约定为：压力向内为正，向外为负。

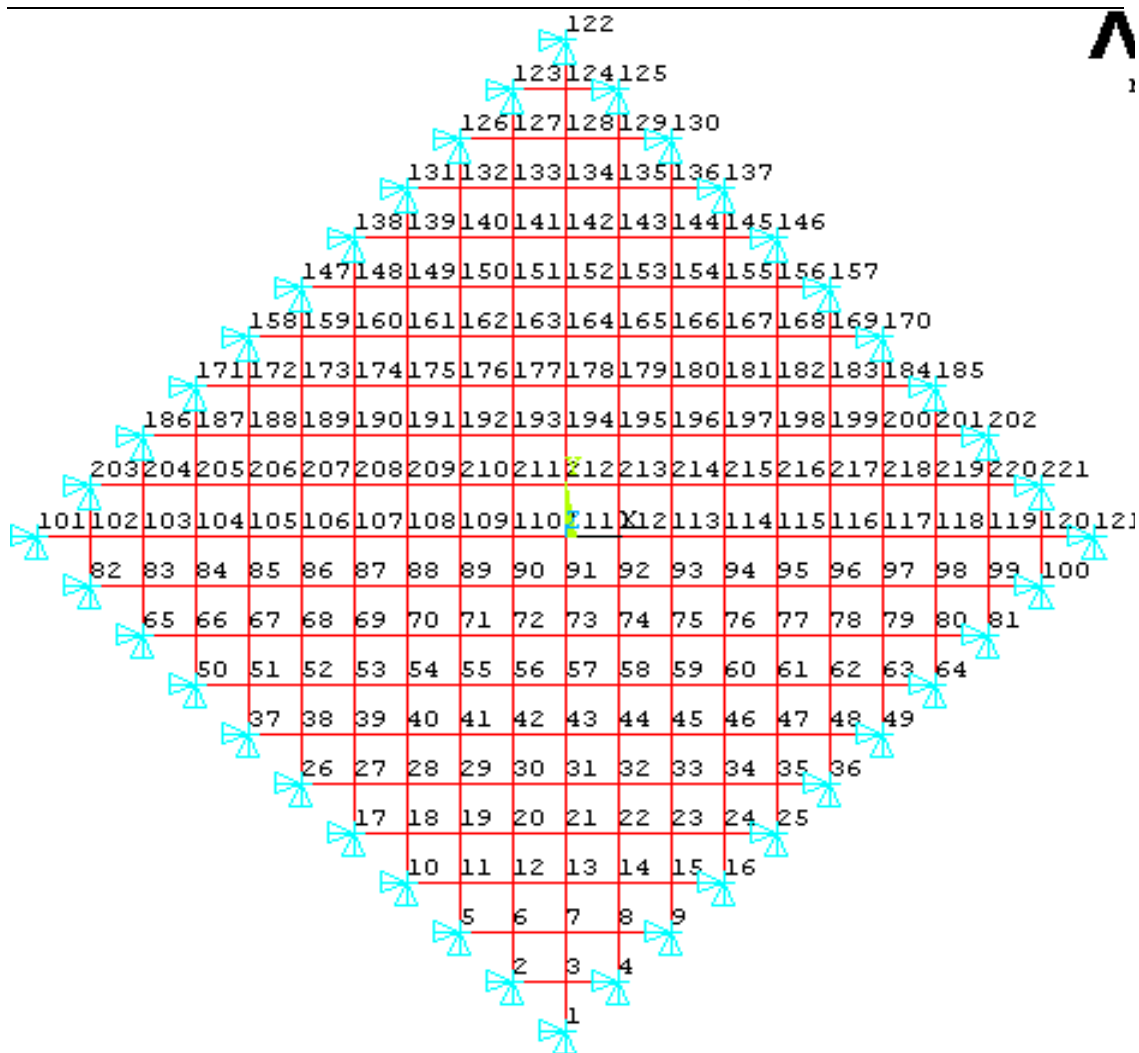


图 4.7 节点布置图



图 4.8 风洞试验模型(缩尺比 1/50)

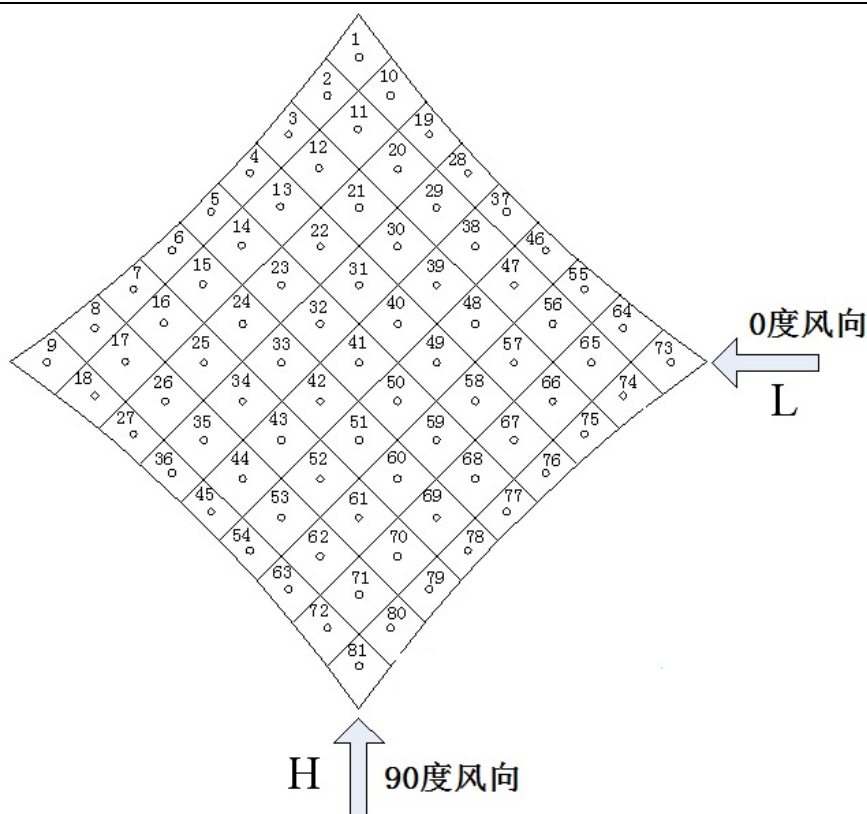


图 4.9 测压点布置 (俯视)

## 4.3.2 风致响应计算时的一些注意事项

### 4.3.2.1 参数取值原则

索体分为钢丝绳索体、钢绞线索体、钢丝束体和钢拉杆索体[172]。其中钢绞线是由多根高强钢丝呈螺旋形绞合而成，具有破断力大、柔韧性好、施工安装方便等特点，在张力结构中应用最为广泛[138]，因而本章计算时所采用的索单元为钢绞线索体，在此对计算中相关参数取值进行必要的介绍。

材料的弹性模量宜由试验方法确定，在不进行试验的情况下，钢绞线索施加预应力后的弹性模量为 $1.95 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$  [172]。

钢绞线常常采用镀锌钢绞线，全部钢丝断面面积较多，规范[173]对此进行了详细的说明，限于篇幅，本章不予列举。除研究断面面积对风致响应的影响外，本章在计算时所取的断面面积均来自于规范[173]。

索结构的阻尼来源于：结构体系、材料、屋面覆盖层、节点连接、预应力、空气、外荷载和支撑结构的影响，索网的阻尼比可取为 $\xi = 1.0 - 3.0\%$  [36]。因此本章在用式(3.75)计算 $a_0$ 和 $a_1$ 时，阻尼比 $\xi_i = \xi_j = 0.02$ ，本章下文中不再予以赘述。

关于屋面分布荷载大小，文献[138]定性指出：悬索结构最大的特点是自重

轻,因此在保证结构稳定、屋面刚度和抗风等要求的前提下,应尽量采用轻型屋面,使索结构的优越性得以充分发挥。而文献[142]在结构设计的荷载部分却定量指出:若使用布、塑料或波形金属板,则分布荷载(笔者注:原文中叫恒载 Dead Load)可以小到  $240\sim 720\text{N/m}^2$ (笔者注:这可能属于轻型屋面),若使用混凝土板或木板,则分布荷载为  $720\sim 1440\text{N/m}^2$ (笔者注:这可能属于重型屋面)。

此外本章在计算风致响应时,除了考虑结构参数的影响外,还考虑了风场参数的响应,具体来说就是考虑基本风压和风向角对响应的影响。

在悬索屋盖的设计中,需要考虑钢索的强度校核及悬索屋盖的变形控制[138],据此来决定结构参数和风速的选取,其具体规定如下:

- 1) 对于强度校核,文献[172]规定:预应力钢结构中的钢索强度的设计值不应大于索材极限抗拉强度的  $40\%\sim 50\%$ ,重要索取低值,次要索取高值。文献[172]也同时进一步规定钢索抗拉强度的设计值有 820、870、930、980 和 1040MPa 五种取值情况。为便于明确地讨论参数变化对响应的影响,本章采用的设计值均取为 1040MPa。
- 2) 对于悬索屋盖的变形控制,文献[138]规定:对于索网屋盖,自预应力状态算起,承重索跨中竖向位移与其跨度之比不应大于  $1/250$ 。

#### 4.3.2.2 时程计算时的初始位形

当采用图 4.1 中的三种计算方案开始计算非线性时程或线性时程时,需要知道各自对应的初始位形,便于计算结构在此位形下的刚度矩阵、频率和模态,并进一步分析时程响应。

在计算方案一中,时程计算时的初始位形指的是结构找形后的位形,在计算该位形的自振频率和模态时需要考虑质量和初始预拉力的影响。

计算风致响应的最通常方法是把风荷载分成准静态成分(即平均风荷载)和脉动成分(即脉动风荷载),准静态成分用非线性静力问题求解[45; 50; 52],在进行脉动风荷载作用下索网的响应分析时,可假设荷载——变形之间的特征是线性的[8; 50; 52],即此时结构为线性的,所采用的方案即为本章的计算方案二。不过为了进一步分析风荷载对结构响应的影响特点以及为第 5 章大跨度屋盖脉动风等效静力风荷载的研究奠定基础,本章又采用计算方案三进行风致响应的计算。

在计算方案二、三中,时程计算时的初始位形指的是静态平衡位置。静态平衡位置也叫静力平衡位置或静平衡位置[53; 158]。当采用计算方案二时,静态平衡位置指的是结构找形后,再考虑结构在自重、平均风荷载以及初始预拉力三者共同作用下的平衡位形。当采用计算方案三时,静态平衡位置指的是对结构找形后,再考虑结构在自重和初始预拉力二者共同作用下的平衡位形。大跨度悬索屋



盖静态平衡位置的确定需要考虑几何非线性的影响[8], 因此本章将采用第3章介绍的静力非线性理论求解静态平衡位置。

### 4.3.3 风致响应计算

本章在采用图4.1所示的三种计算方案对结构进行风致响应进行研究时, 主要研究一些结构参数和风场参数单独变化时对结构自振频率、模态和响应的影响, 并着重分析三种计算方案之间的差异。需要在此首先说明的是:

1. 当采用计算方案二时, 最后的总响应为静态平衡位置(此静态平衡位置包括了平均风的作用)时的响应叠加脉动风荷载下的线性时程响应。在进行响应的统计值计算时, 不难得知总响应的均值等于静力非线性计算结果, 总响应的均方根等于脉动风风致线性响应计算结果。
2. 当采用计算方案三时, 最后的总响应为静态平衡位置(此静态平衡位置没有包括平均风的作用)时的响应叠加整体风荷载下的线性时程响应。在进行响应的统计值计算时, 不难得知总响应的均值等于静力非线性计算结果加上整体风风致线性响应均值, 总响应的均方根等于整体风风致线性响应均方根, 也等于脉动风风致线性响应均方根。
3. 由于忽略了索单元的质量, 结构体系的质量便由屋面覆盖层分布荷载  $FD$  (以下简称分布荷载)来提供, 再结合网格尺寸  $DL$  大小(见4.3.1工程概况)把分布荷载转化成节点上的集中质量  $FD \times DL^2/g$  ( $g$  表示重力加速度), 本章在计算时假定非边缘节点上每个集中质量是相等的, 在计算集中质量产生的重力时, 只考虑了竖向(即  $Z$  方向)的重力。
4. 本章在进行静力或动力非线性计算时, 根据计算的实际情况, 所采用的收敛条件均为位移的模小于  $1e-6$ 。

#### 4.3.3.1 初始预拉力对自振频率、模态和响应的影响

在本小节中, 首先研究初始预拉力对时程计算时初始位形的自振频率和模态的影响, 然后计算结构的风致响应。

当仅仅考虑预拉力  $T_0$  的影响时,  $T_0 = 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350kN$ , 索断面面积为  $A = 355.98mm^2$ , 屋盖的分布荷载为  $FD = 600N/m^2$ 。以风向角  $WD = 0$  度的试验结果进行风致响应计算, 相对屋盖高点(高点  $H$  与地面高差为  $16m$ , 即高点高度为  $Z_H = 16m$ , 见4.3.1结构概况)风压无量纲化的风压系数分布图(已考虑上下表面压差)见图4.10。屋盖所在地区的基本风压为  $BW = 0.75KPa$ , 基本风速为  $U_{10} = \sqrt{1600BW} = 34.64m/s$ , 屋盖高点处的风速为  $U_H = U_{10} \cdot (Z_H/10)^{0.16} = U_{10} \cdot (16/10)^{0.16} = 37.35m/s$  [62], 风荷载时程的时间步长为  $\Delta T = 0.0464s$ , 原型/模型的风速相似比为 3.45。

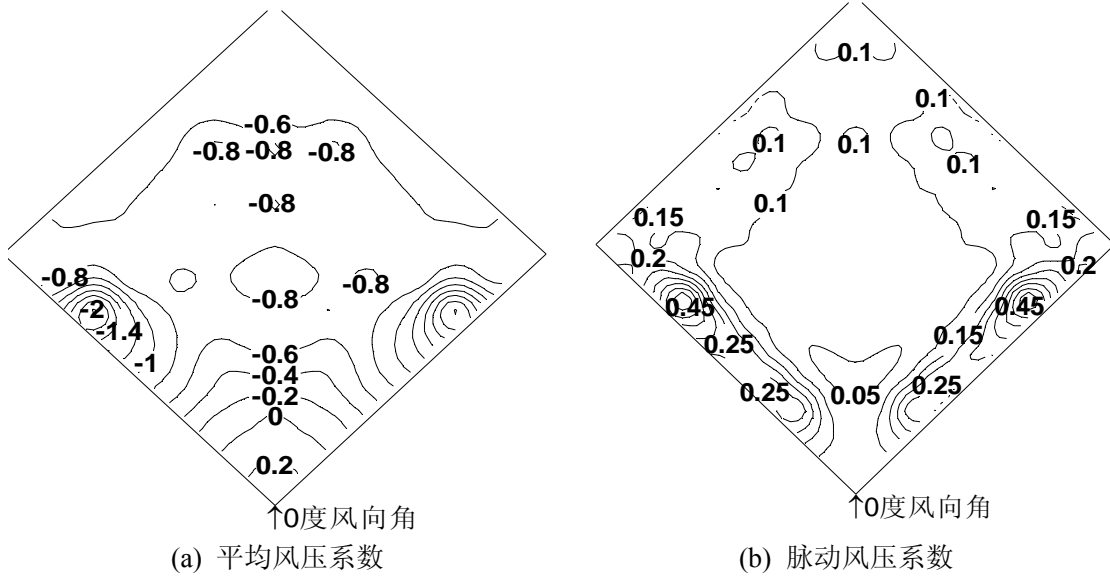


图 4.10 0 度风向角风压系数分布图

由图 4.10 可知[33]: ①在 0 度风向角时, 风从屋面低点吹来, 低点附近局部迎风区域产生正压力, 进而逐渐转变为风吸力, 在接近屋面高点边缘区域产生流动分离, 使得局部区域风吸力很大; ②屋面以负压为主, 平均风压系数等压线的分布成阶梯状; ③屋盖低点迎风区域脉动风系数较小, 而接近鞍型屋盖高点、靠近边缘区域, 风压脉动特性达到最强。而在下风向区域, 由于风从屋盖低点吹来到达高点区域时, 产生了流动分离, 导致脉动风压能量增强, 从而脉动风压系数变大; ④脉动风压较大的区域和平均风压较大的区域基本上是吻合的; ⑤屋盖迎风边缘脉动风压系数的变化梯度较大, 而其它区域变化比较平缓; ⑥对称结构在来流风向平行于对称轴时, 风压系数保持了良好的对称性。

### 1、初始预拉力对自振频率的影响

在计算方案一、二和三中, 初始预拉力对时程计算时初始位形的自振频率的影响分别见图 4.11、图 4.12 和图 4.13。

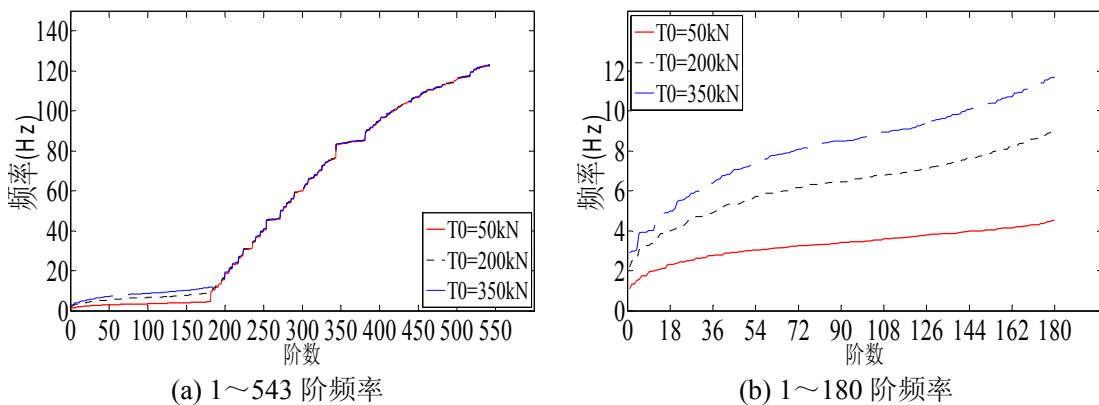


图 4.11 计算方案一中初始预拉力对自振频率的影响

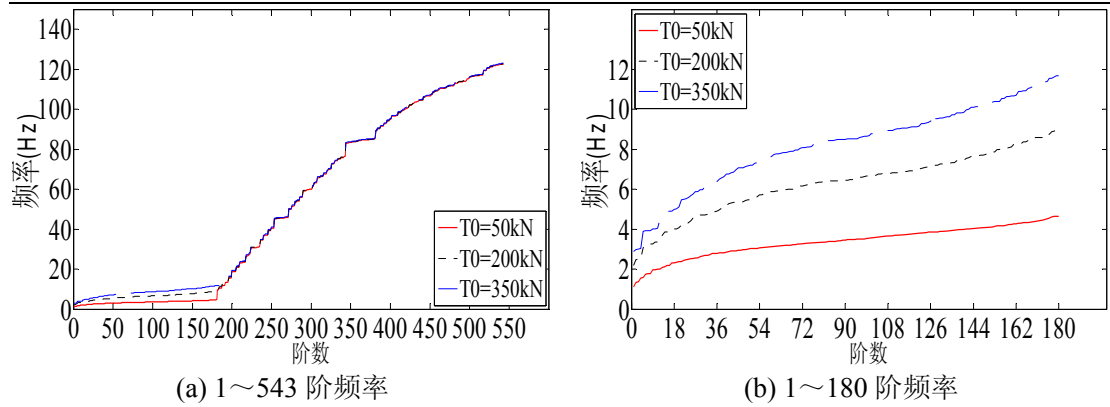


图 4.12 计算方案二中初始预拉力对自振频率的影响

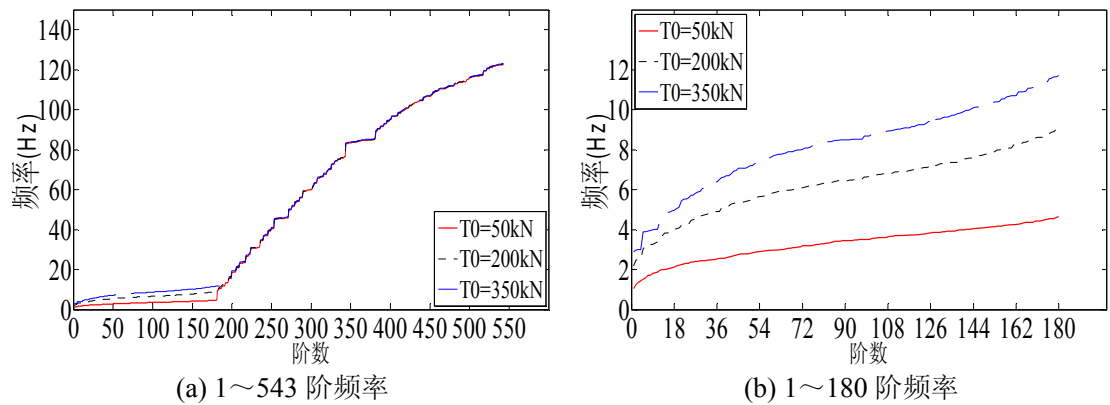


图 4.13 计算方案三中初始预拉力对自振频率的影响

由图 4.11~图 4.13 可知：①同阶自振频率随着初始预拉力的增加而增加，预拉力大小对结构的低频影响较大，而在高频段，频率受预拉力大小的影响很小；②在低频段，结构的频率比较密集，呈连续分布，因此在对结构进行动力分析时，需要考虑多个低阶频率对 Rayleigh 阻尼矩阵的影响；③结构频率大致在第 181(即内部非约束节点数)阶后产生较为明显的增长。

在此需要指出的是，在用式(3.75)计算  $a_0$  和  $a_1$  时，本章根据上述频率特点考虑了结构前 180 阶频率的影响，其中  $\omega_i$  取第 1~90 阶自振圆频率的平均值， $\omega_j$  取第 91~180 阶自振圆频率的平均值。

由图 4.11~图 4.13 也可以知道，频率差异主要集中在低频段。本章在此也分析了在相同初始预拉力情况下、而在不同计算方案之间的 1~180 阶频率之间的差异，见图 4.14。

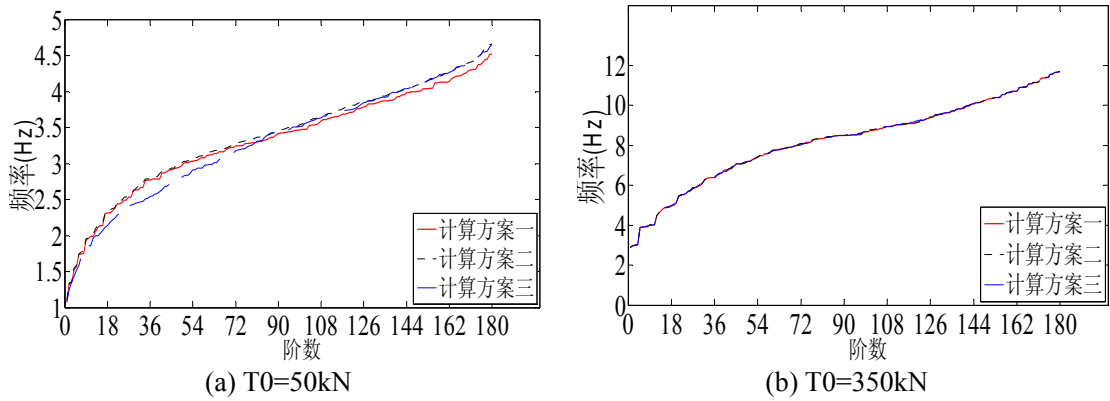
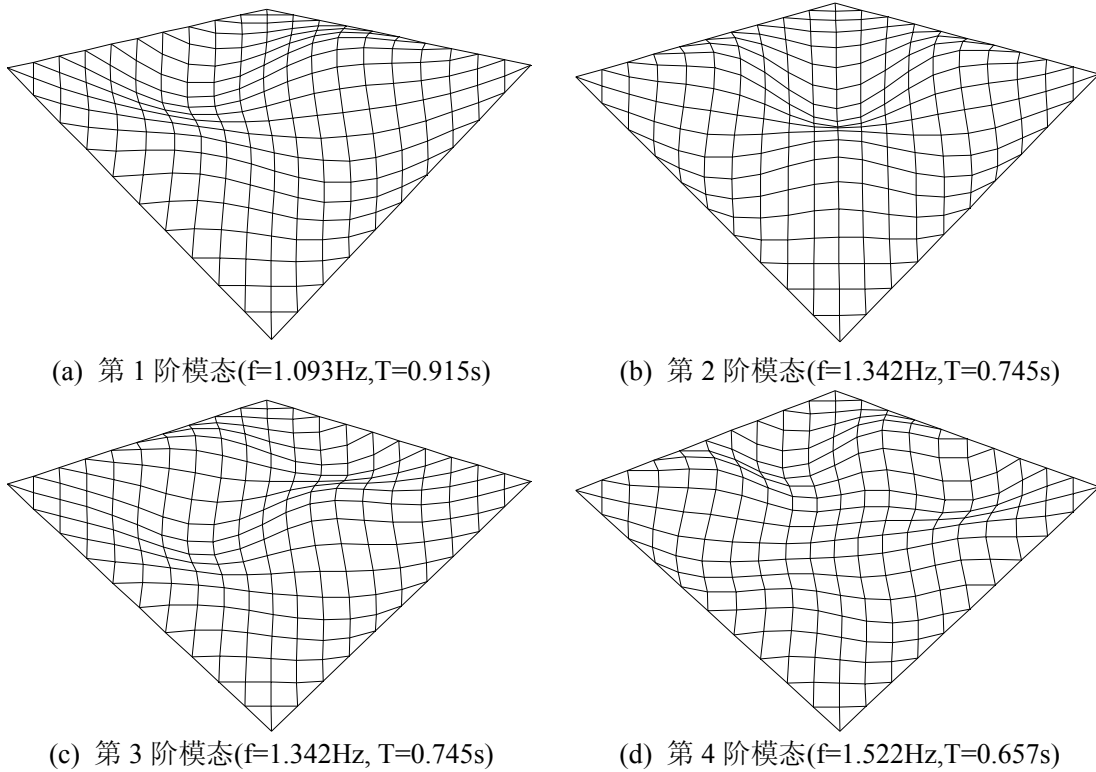


图 4.14 相同初始预拉力情况下、不同计算方案之间的低频段之间的差异

由图 4.14 可知，当初始预拉力较小时，低频段的频率在三种计算方案之间存在一定的差异，不难推知预拉力越小(笔者注：预拉力过小时，单元轴力时程出现压力，这不符合 3.3.1 中的基本假定 2)，本章不予讨论。)，差异越大；当初始预拉力较大时，低频段的频率在三种计算方案之间的差异很小。

## 2、初始预拉力对结构模态的影响

在计算方案一、二和三中，初始预拉力对时程计算时初始位形的结构模态的影响分别见图 4.15~图 4.17、图 4.18~图 4.20 和图 4.21~图 4.23，图中  $f$ 、 $T$  分别表示模态对应的频率和周期，下文与之相同，不再赘述。



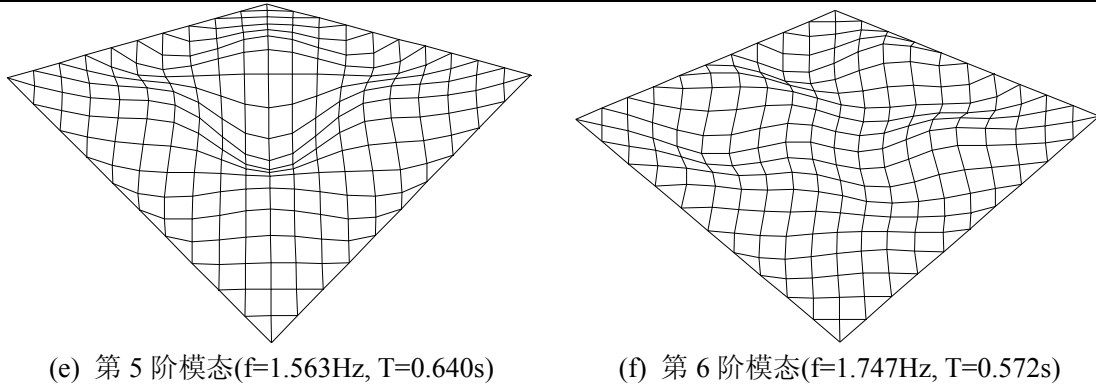


图 4.15 计算方案一中初始预拉力  $T_0=50\text{kN}$  时的部分结构模态

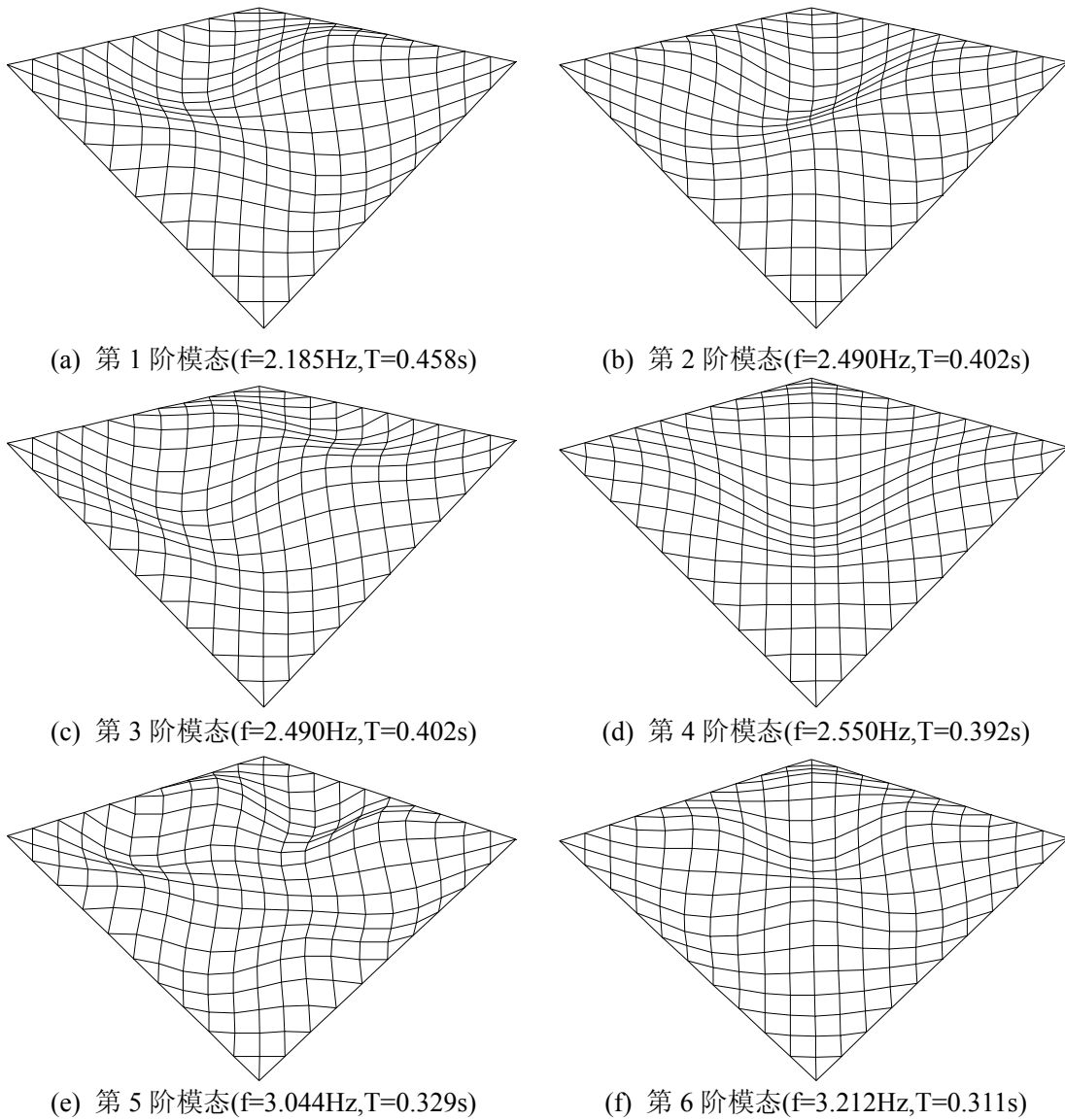


图 4.16 计算方案一中初始预拉力  $T_0=200\text{kN}$  时的部分结构模态

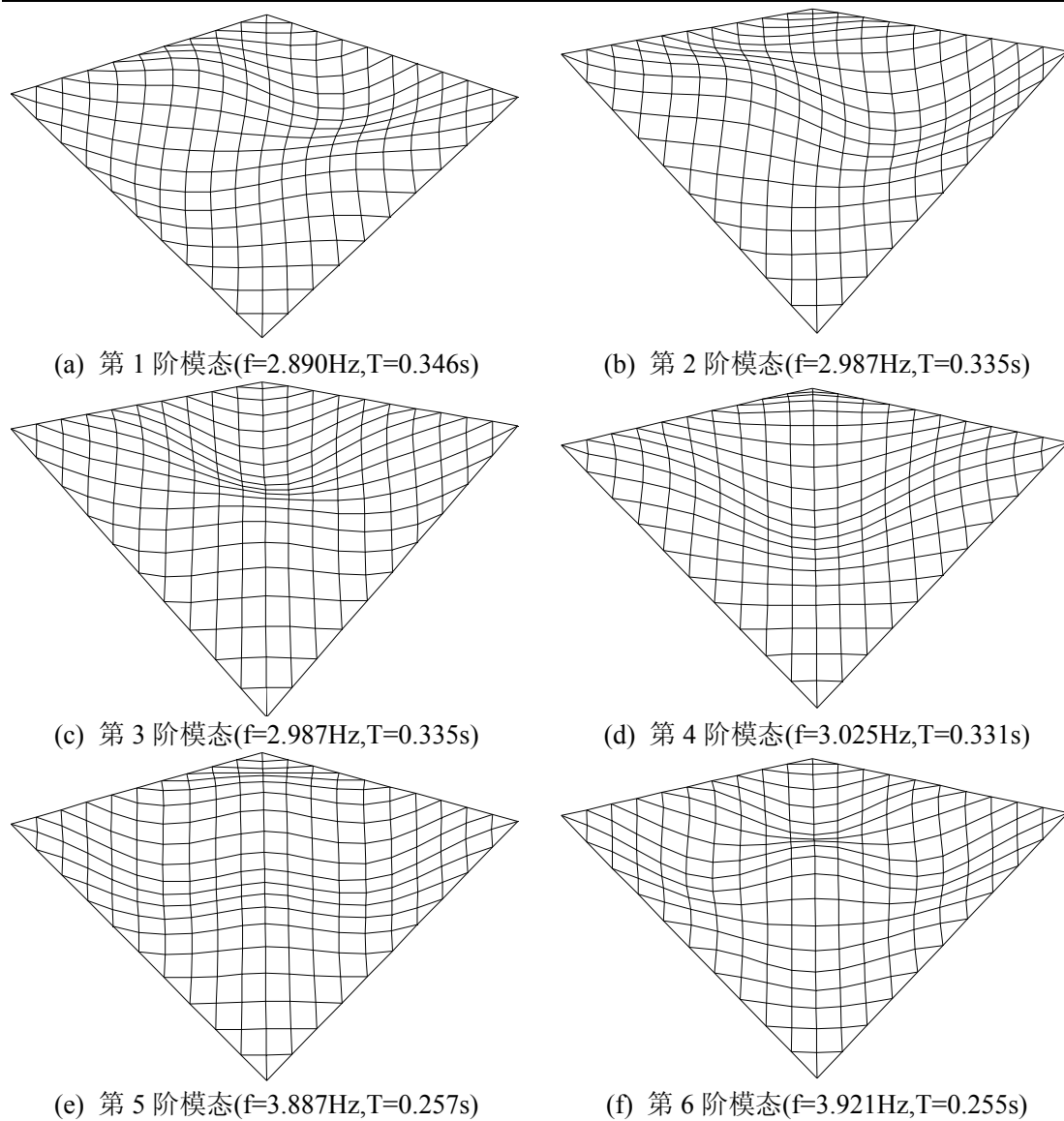
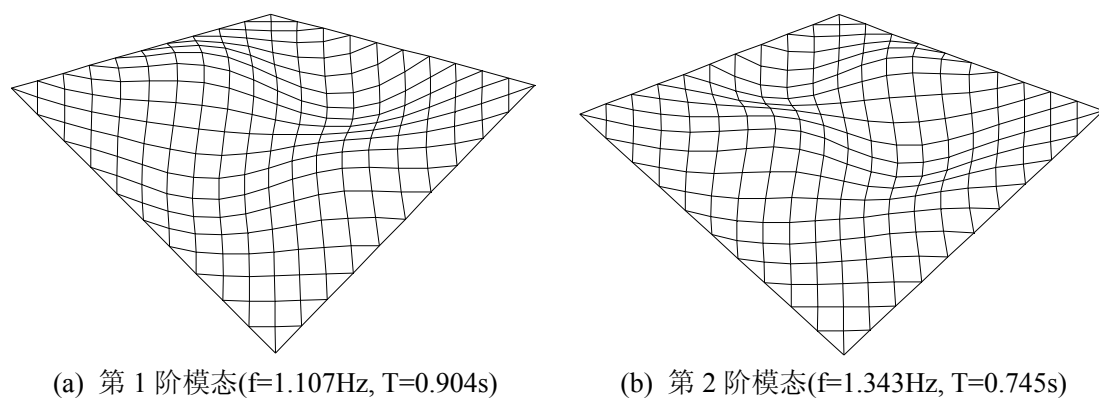


图 4.17 计算方案一中初始预拉力  $T_0=350\text{kN}$  时的部分结构模态



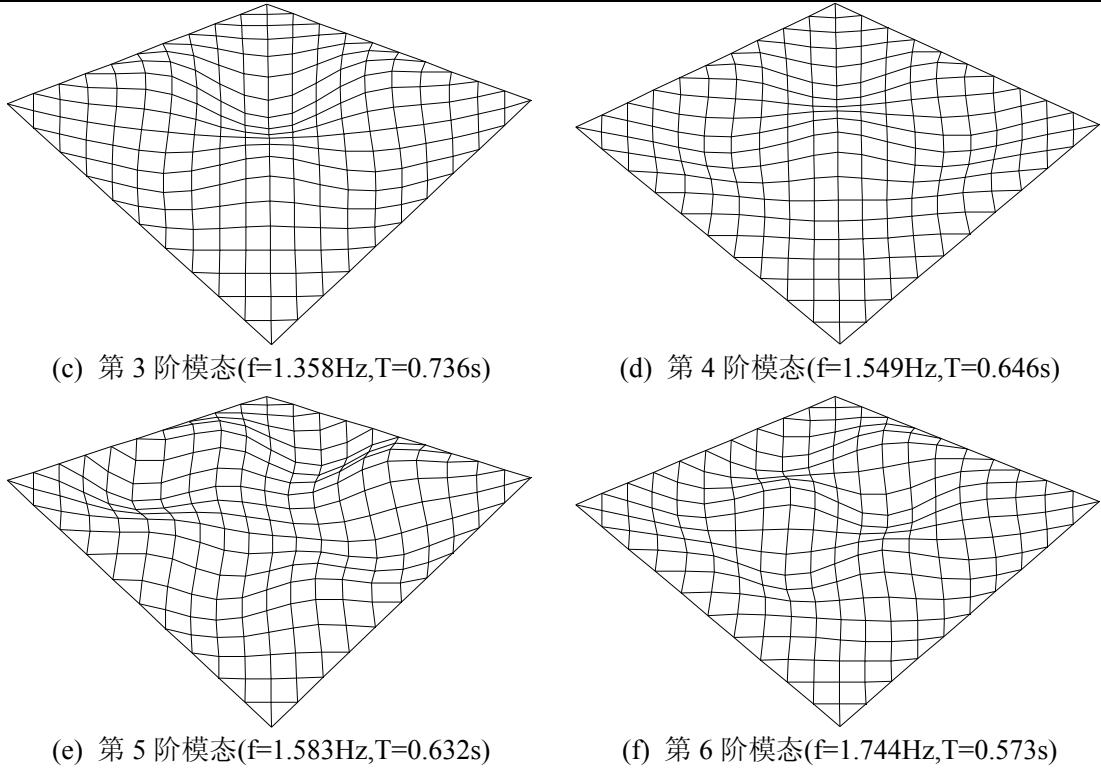
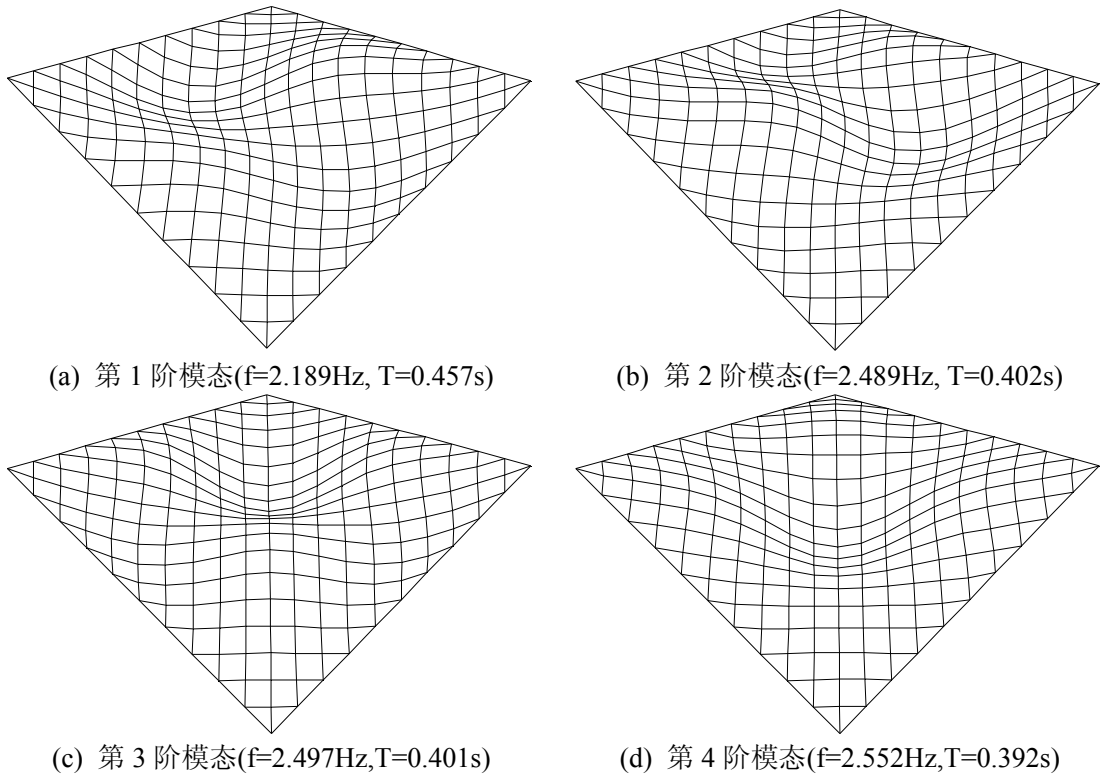


图 4.18 计算方案二中初始预拉力  $T_0=50\text{kN}$  时的部分结构模态



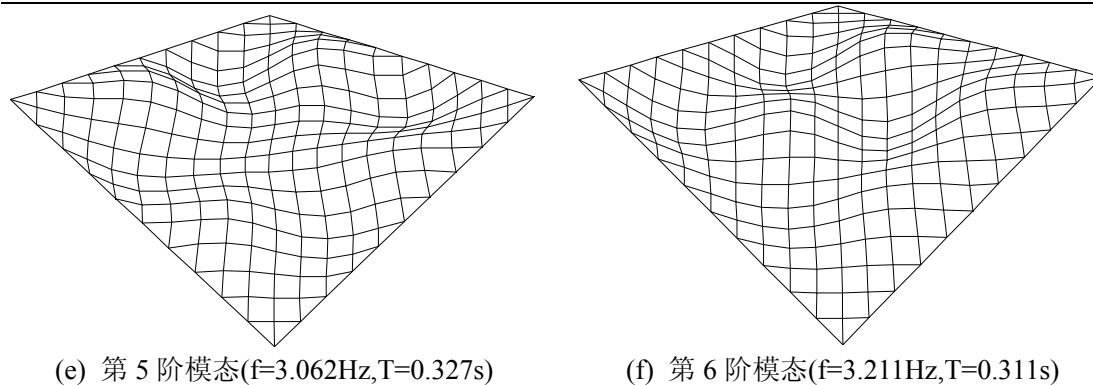


图 4.19 计算方案二中初始预拉力  $T_0=200\text{kN}$  时的部分结构模态

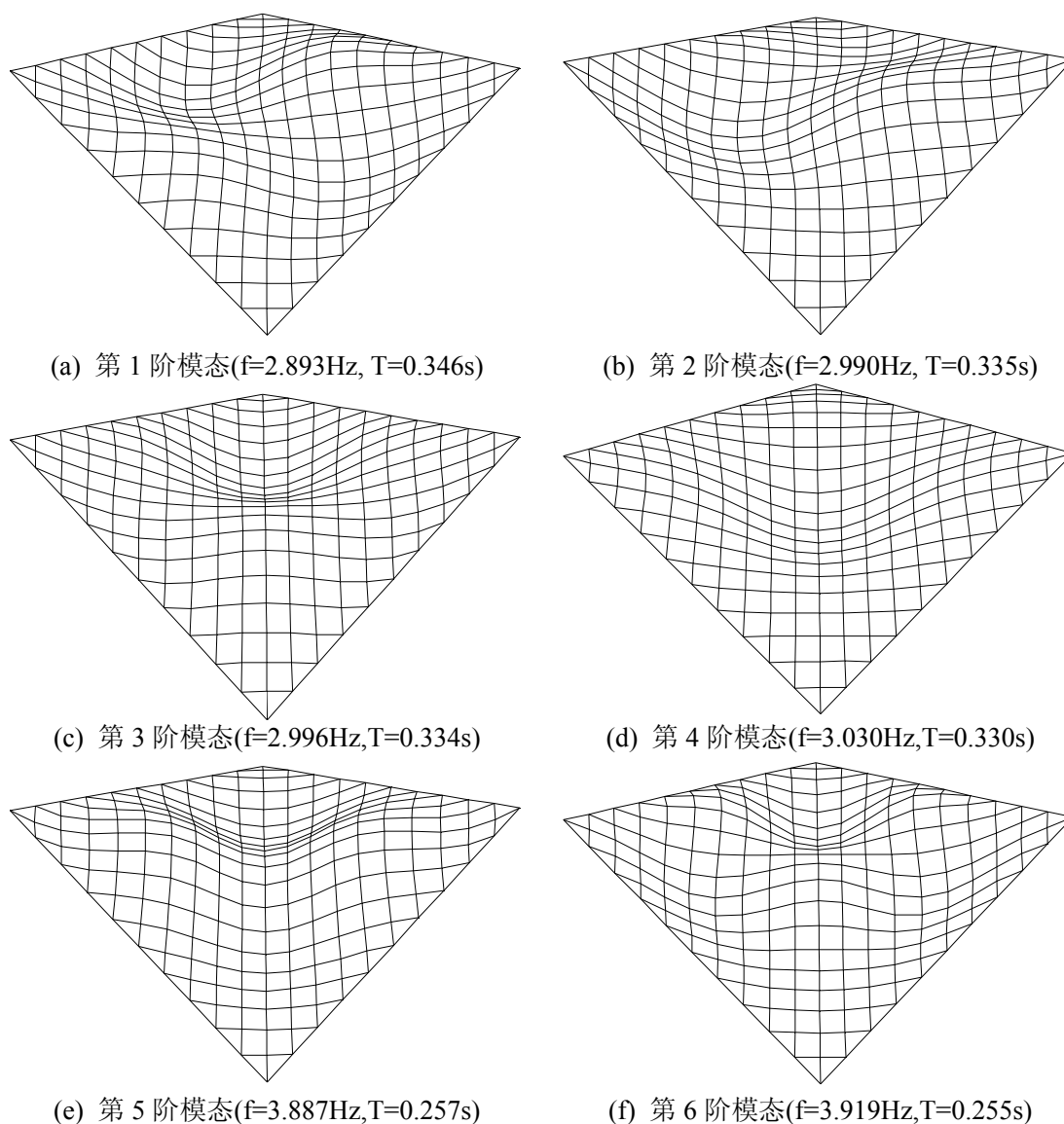


图 4.20 计算方案二中初始预拉力  $T_0=350\text{kN}$  时的部分结构模态



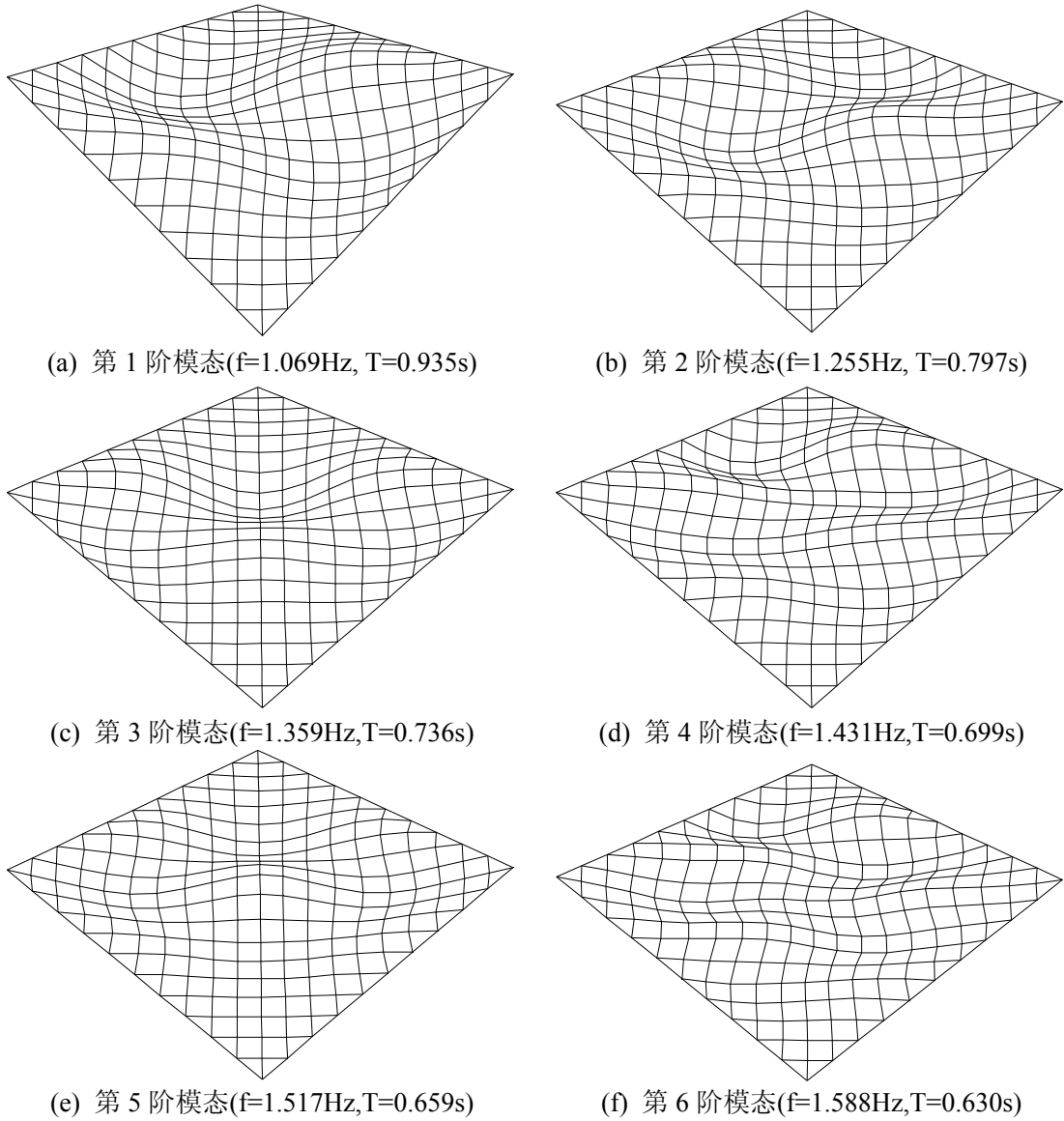
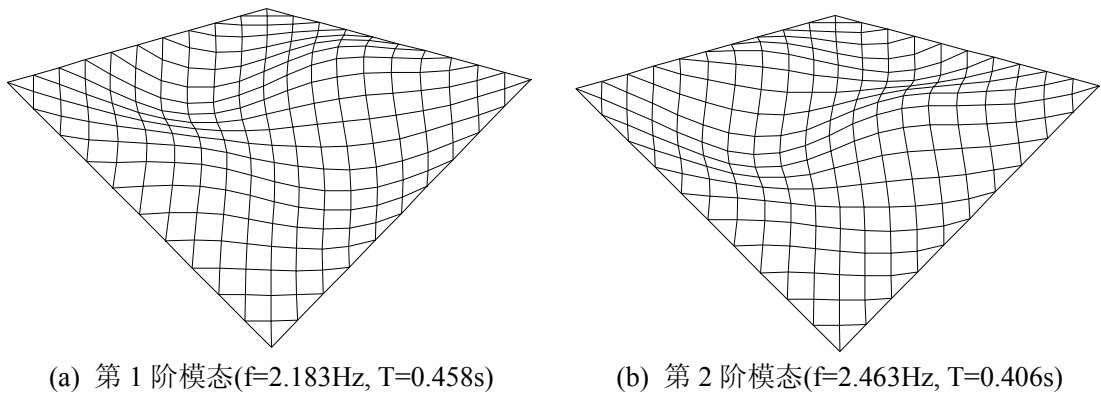


图 4.21 计算方案三中初始预拉力  $T_0=50\text{kN}$  时的部分结构模态



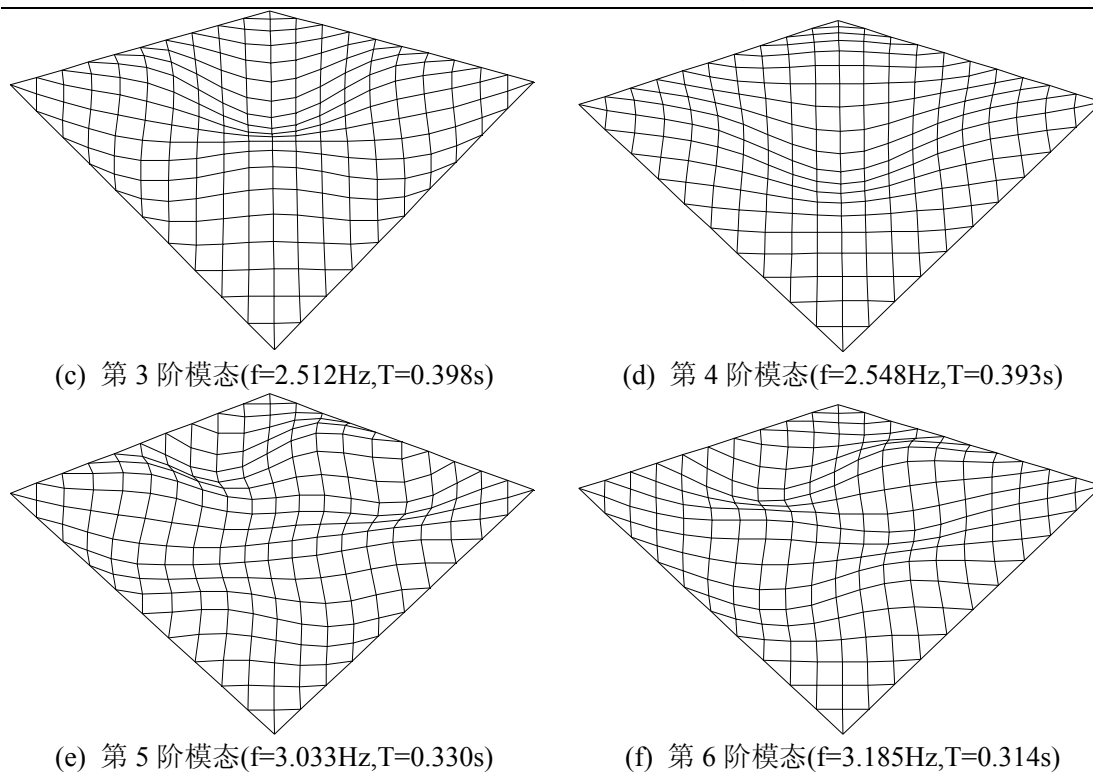
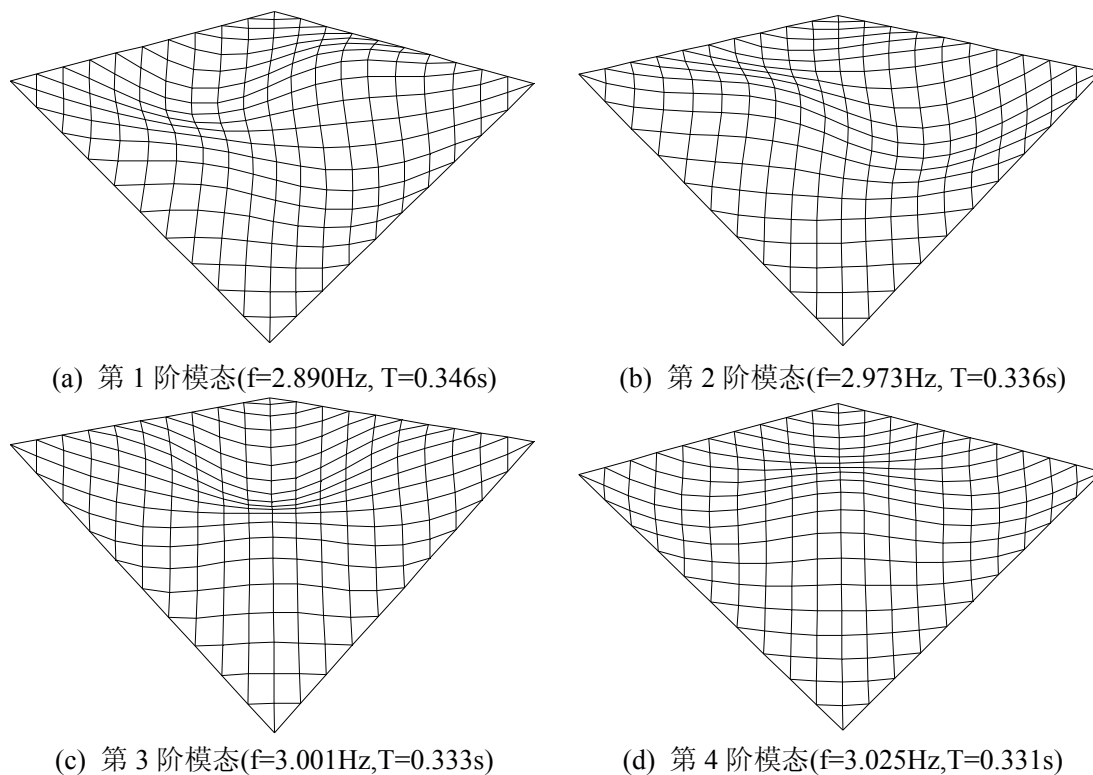
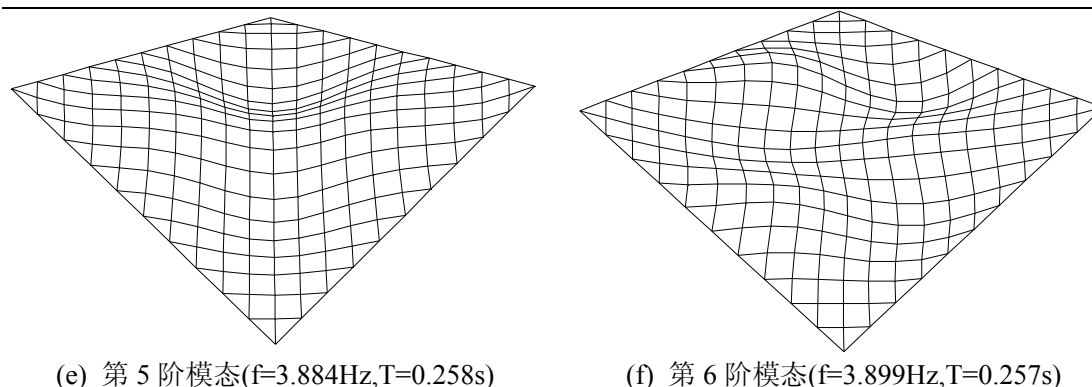


图 4.22 计算方案三中初始预拉力  $T_0=200\text{kN}$  时的部分结构模态



图 4.23 计算方案三中初始预拉力  $T_0=350\text{kN}$  时的部分结构模态

由图 4.15~图 4.23 可知：①多数情况下，结构前若干阶模态为单轴或双轴反对称形式，这与文献[138]的结论是一致的；②结构的第 1 阶模态为双轴反对称模态，文献[138]指出，当矢跨比较小时，结构的第 1 阶模态可能为双轴对称形式，而当矢跨比较大时一般为双轴反对称形式，不过索网的第 1 阶模态通常为反对称的。文献[142]也指出，通过对不同形式的索系统进行研究，可得出一般性结论，与传统刚性结构相反，索系的第 1 阶模态往往为反对称的，且不受弹性伸长的影响；③各阶模态在两个方向上均为多波曲线，整个曲面变化复杂(即模态复杂)，这与文献[38; 142]的结论是一致的，不过阶数越高，模态形状越复杂；④在同一计算方案中，不同的初始预拉力使得同阶模态的形状也存在一定的差异，正如文献[142]指出预应力在某些情况下将影响模态形状。文献[52]也指出索网屋盖的模态不仅随结构自身的变化而变化，而且随预拉力水平、荷载和振幅的变化而变化；⑤总的来说，同一初始预拉力下不同计算方案的同阶模态形状相差较大，虽然个别同阶模态形状相似。

### 3、初始预拉力对响应的影响

本小节将分析初始预拉力  $T_0$  对响应统计值、响应功率谱密度和阵风响应因子的影响，对比分析三种计算方案的差异。

#### 1) 初始预拉力对结构变形的影响

为了大致了解初始预拉力对整个屋盖节点位移统计值的影响，本章在此给出三种计算方案中不同预拉力情况下结构的平均位移和脉动位移(本章称之为结构变形)，见图 4.24~图 4.26。

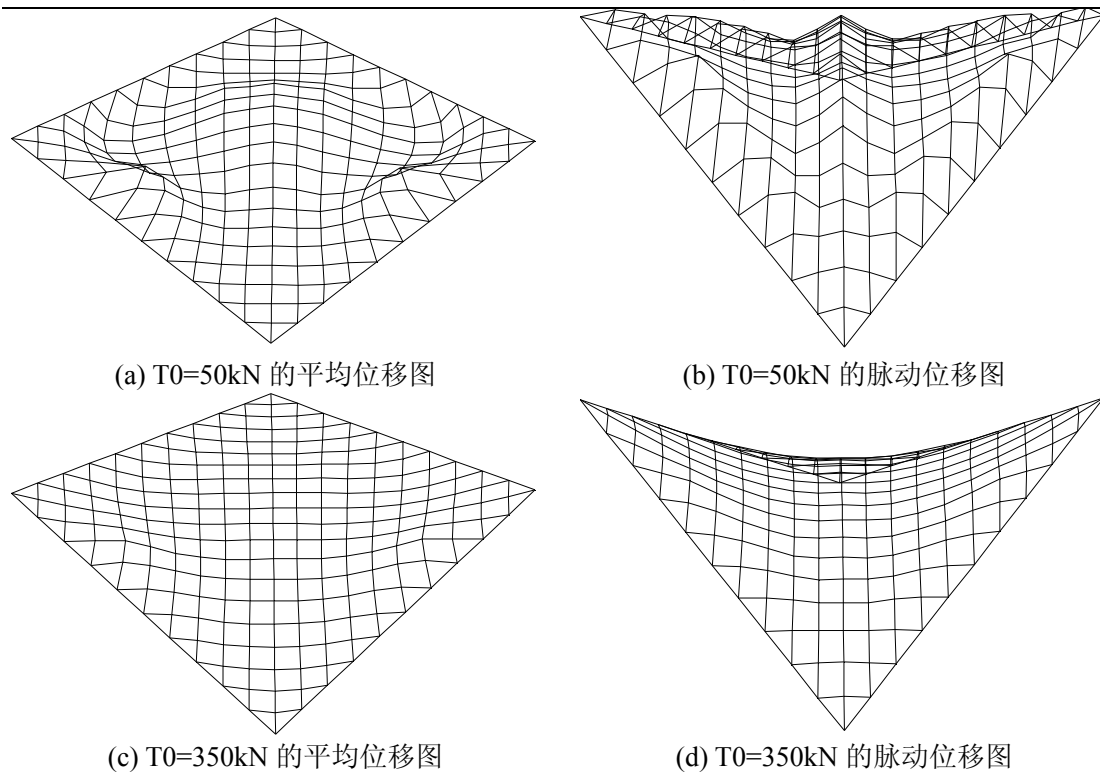


图 4.24 计算方案一中初始预拉力对结构变形的影响

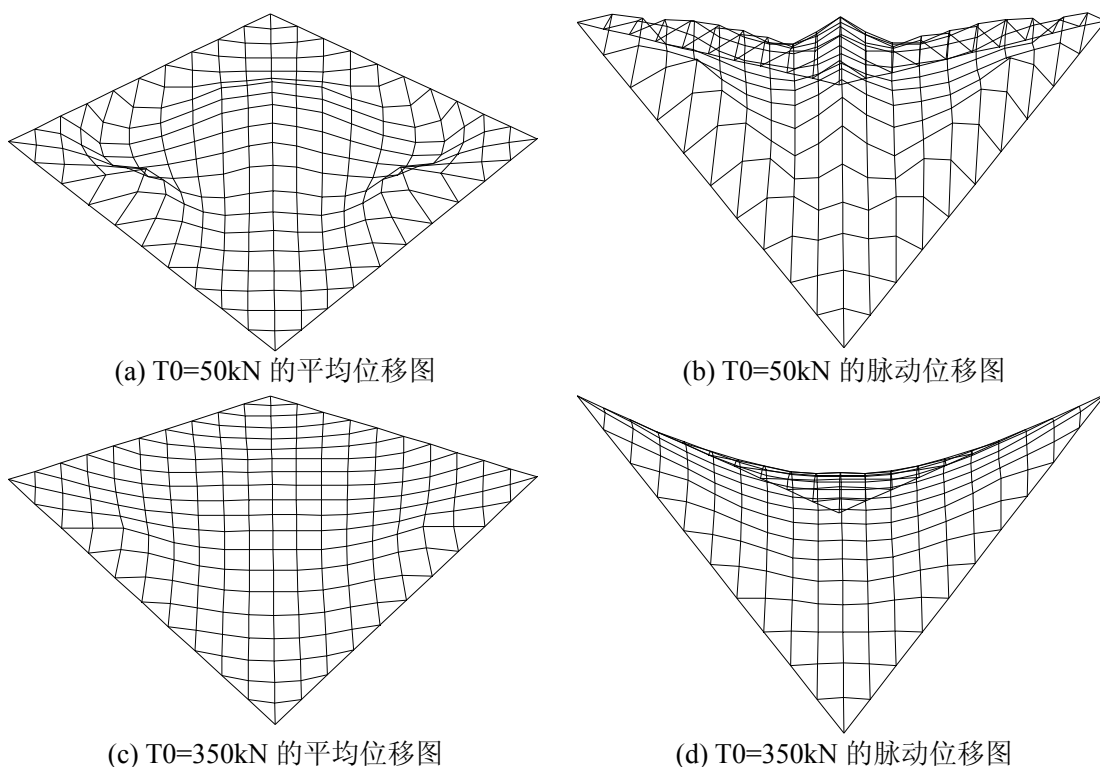


图 4.25 计算方案二中初始预拉力对结构变形的影响

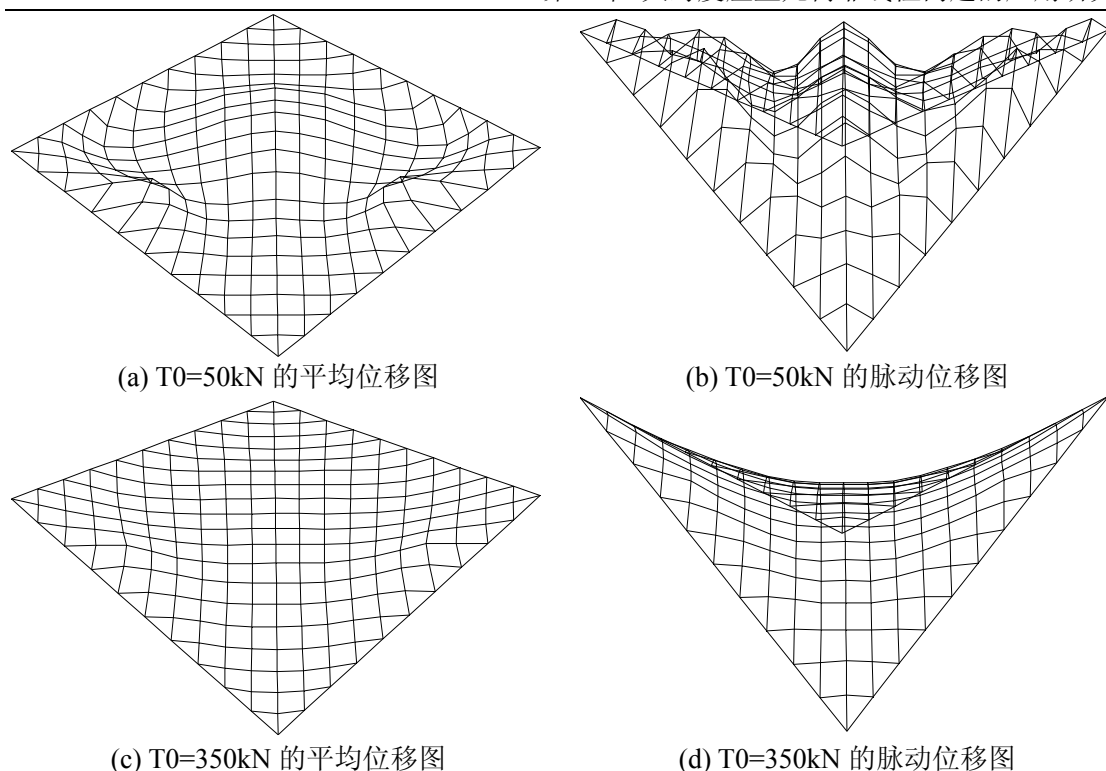


图 4.26 计算方案三中初始预拉力对结构变形的影响

由图 4.24~图 4.26 可知：①风荷载分布关于 Y 轴对称，结构变形图也关于 Y 轴对称；②风荷载的方向和大小与结构位移的方向和大小也是一致的，在风压(正压和负压)比较大的地方，结构沿风荷载方向的位移也较大，相反则小(笔者注：特点①、②在本章后文中同样出现，不再进行阐述)；③初始预拉力对结构的变形影响较大，当预拉力较小时，位移(平均值和脉动值)较大，而当预拉力较大时，位移较小。

## 2) 初始预拉力对响应统计值的影响

本章前文已对结构的整体变形进行了分析，限于篇幅，本小节将对部分节点和单元的响应统计值进行研究。因为风向角为 0 度，因而 Y 轴上的节点在 X 轴上的位移为 0，本章对此不予研究，下文不再进行说明。

由图 4.7、图 4.10 和图 4.24~图 4.26 不难得知，节点 67 处于高负压区，该点的风压系数(平均风压和脉动风压)绝对值较大，节点沿风荷载方向的位移也较大；节点 3 处于屋盖上唯一的正压区；此外节点 111 也常是人们关注的屋盖跨度中点，而且该点的负压也较大。因此本小节将对这三个节点及与之相连的 Y 方向稳定索单元 267、203、391 和 X 方向承重索单元 59、2、101(见图 4.27) 进行风致响应研究。

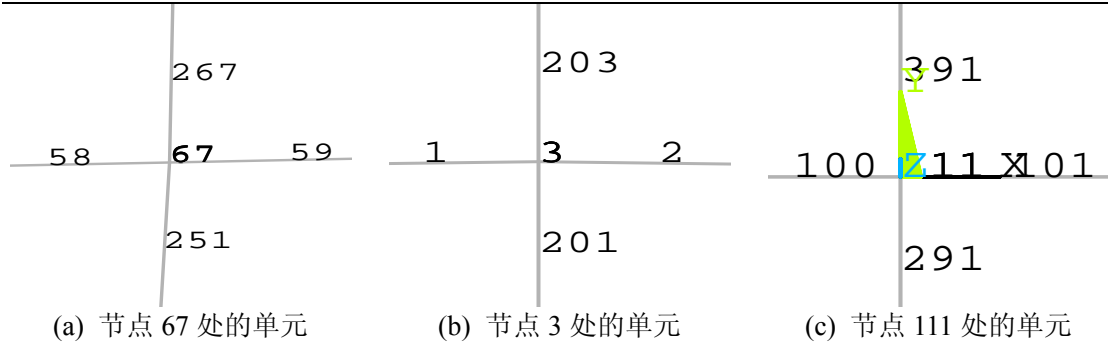
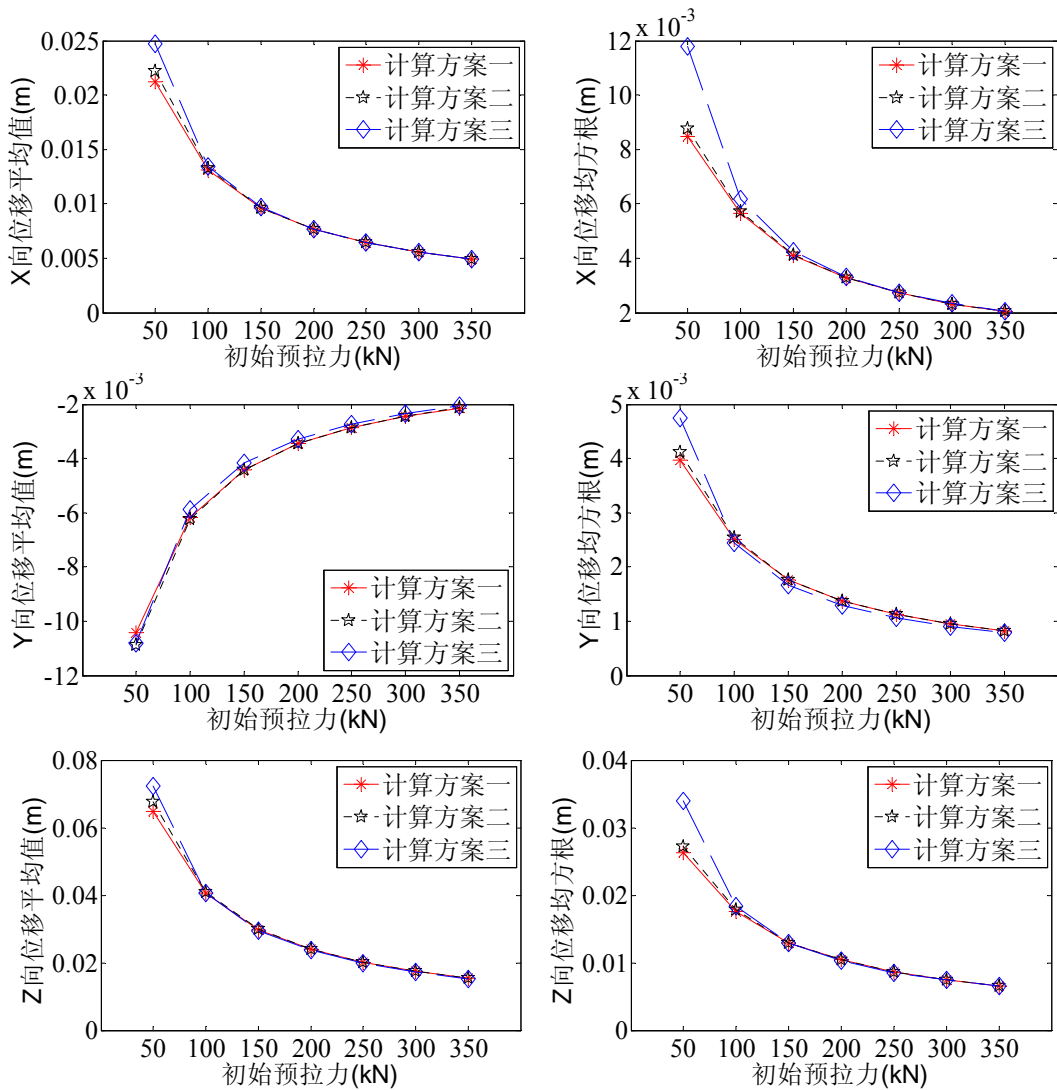
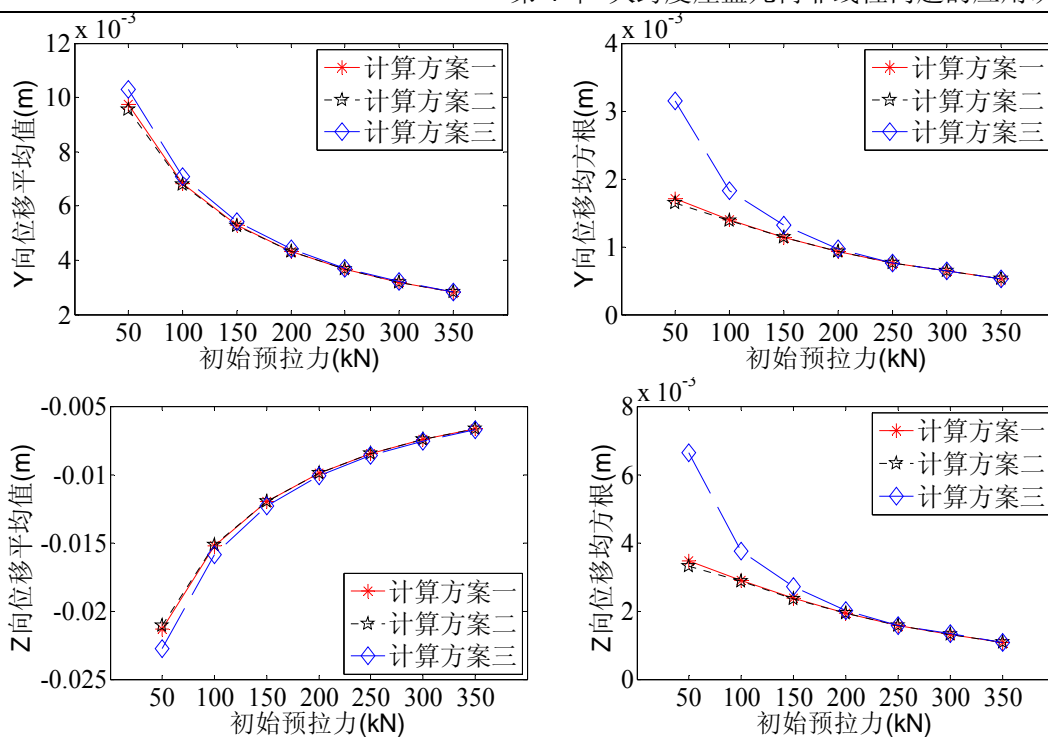


图 4.27 所研究节点处的单元

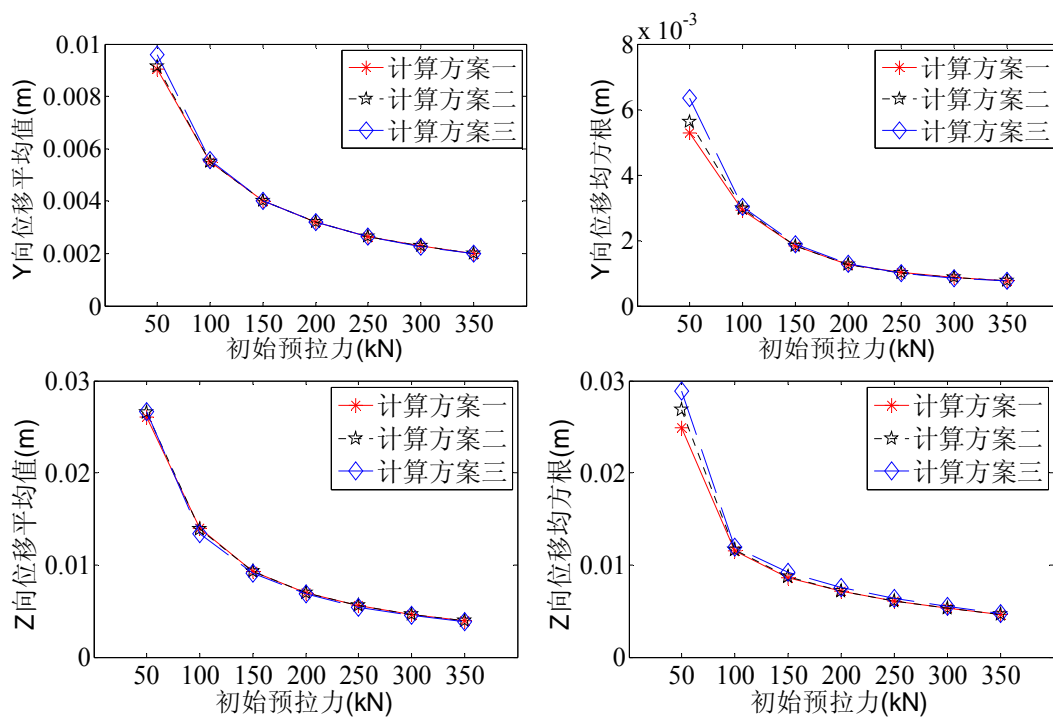
初始预拉力对所研究节点和所研究单元的响应统计值的影响见图 4.28 和图 4.29。



(a) 节点 67 位移统计值

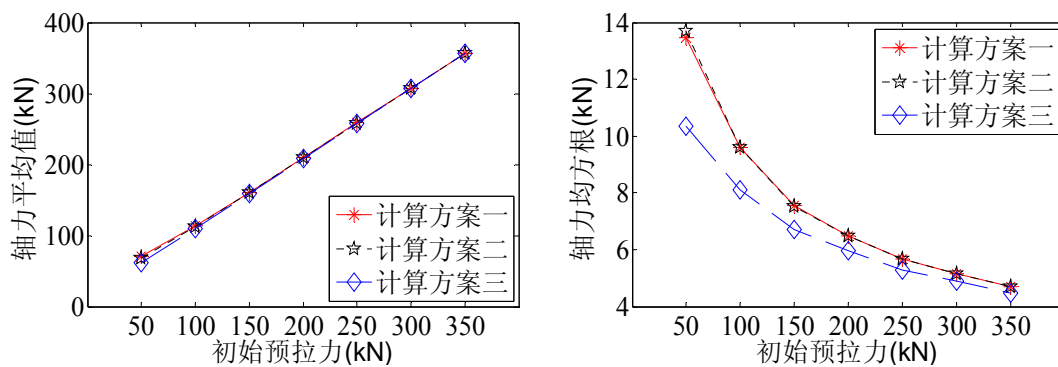


(b) 节点 3 位移统计值

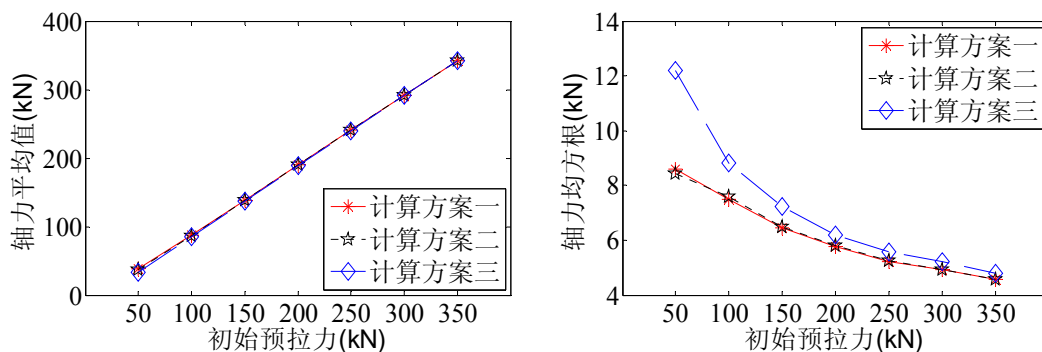


(c) 节点 111 位移统计值

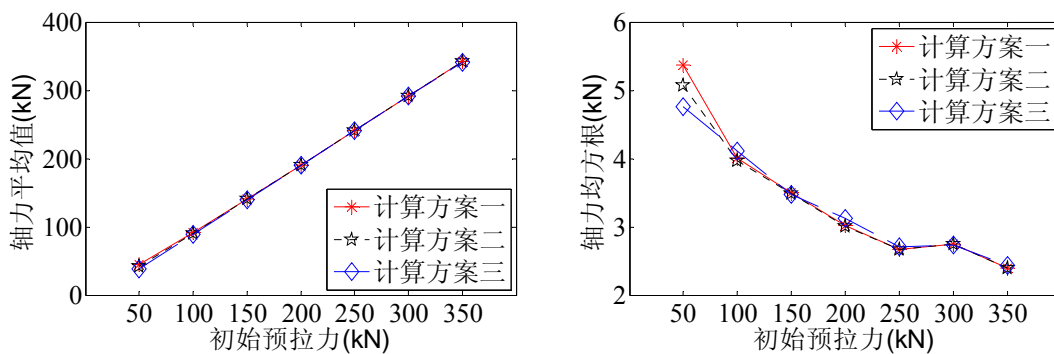
图 4.28 初始预拉力对节点位移统计值的影响



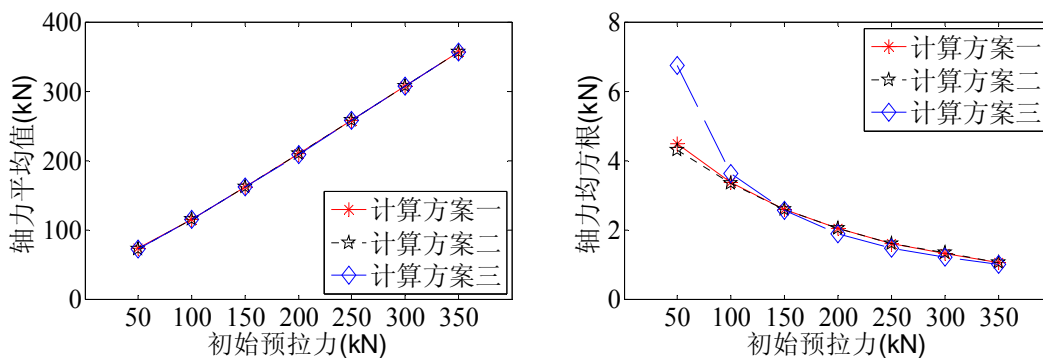
(a) 单元 267 轴力统计值



(b) 单元 59 轴力统计值



(c) 单元 203 轴力统计值



(d) 单元 2 轴力统计值



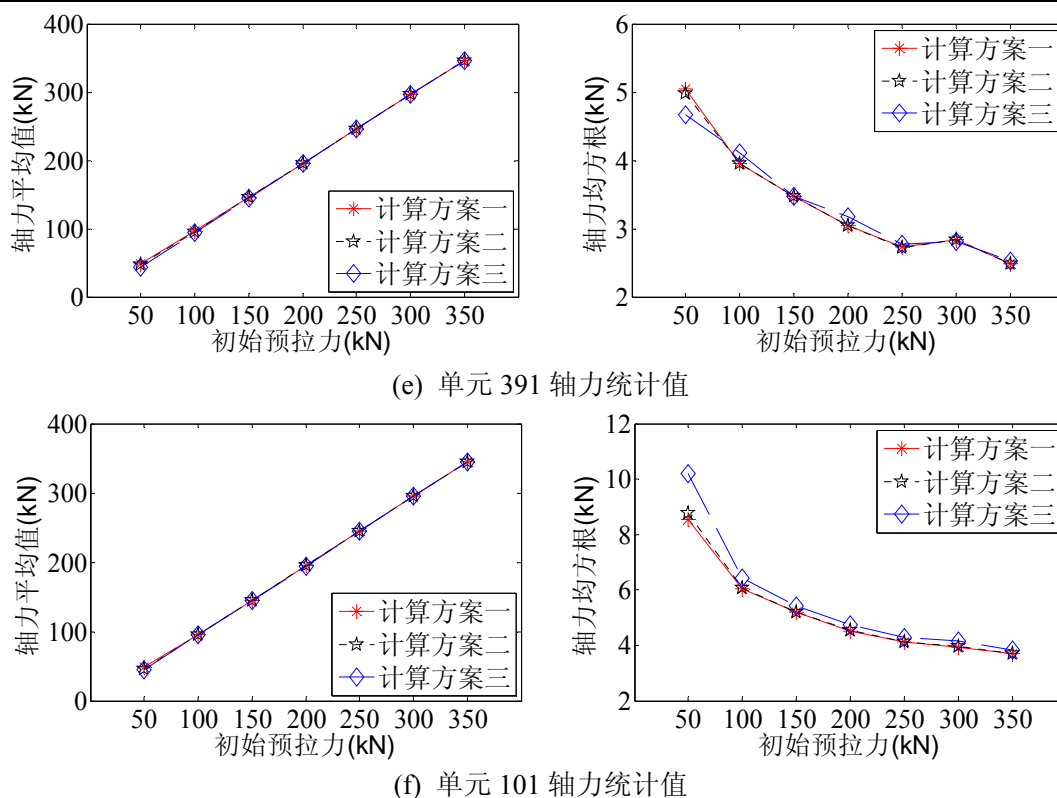


图 4.29 初始预拉力对单元轴力统计值的影响

由图 4.28 可知风荷载分布特性对节点位移统计值的影响特点有：①节点 67 处于高负压区，X、Y 和 Z 方向的风荷载分别为正(即与坐标轴的正方向相同)、负(即与坐标轴的正方向相反)和正，节点存在同时向 X 轴正向、Y 轴负向和 Z 轴正向的运动趋势，因而 X、Y 和 Z 向的平均位移分别为正、负和正；②节点 3 受正压，X、Y 和 Z 方向的风荷载分别为 0、正和负，节点存在同时向 Y 轴正向和 Z 轴负向的运动趋势，因而 X、Y 和 Z 向平均位移为 0(本章下文中不再予以讨论)、正和负；③节点 111 也处于较大的负压区，虽然 X、Y 方向的风荷载均为 0，Z 方向的风荷载为正，但是由图 4.10 可知，屋盖上远离来流的上半部分受到较大的负压，使得整个屋盖有向 Y 轴正向、Z 轴正向运动的趋势，因而该节点在 Y、Z 向的位移均值均为正。

由图 4.28 同时可知：①初始预拉力大小对节点位移影响很大，预拉力越大，结构刚度越大，因而位移的统计值(均值在此为绝对值，本章下文同)越小；②位移平均值和均方根在同一初始预拉力下具有相同的量级，因而结构属于风敏感结构[50; 174]；③随着预拉力的逐步增加，位移统计值的增加或下降趋势均逐渐减弱，也即当体系的预拉力较小时，曲线斜率随着预拉力的变化而急剧变化，而当预拉力较大时，曲线斜率的变化较小，几乎保持为一个定值。

由图 4.29 可知：①初始预拉力对单元轴力的影响也很大，预拉力越大，单元轴力平均值与预拉力越接近，而且轴力均方根越小；②当预拉力较小时，轴力

平均值和均方根具有相同的量级。而当预拉力较大时，均方根远远小于平均值，这一点与位移不同，说明当考虑非线性时，预拉力对位移均方根和轴力均方根的影响没有一致性；③轴力平均值的斜率几乎不随预拉力的变化而变化，但是当预拉力较小时，轴力均方根的曲线斜率随着预拉力的变化而急剧变化，而当预拉力较大时，曲线斜率的变化较小，几乎保持为一个定值。

如果用响应统计值和外部影响因素之间的比例关系(即斜率)为定值和非定值来分别定义结构是线性和非线性，那么由上面的初始预拉力对响应统计值的影响分析可知：当预拉力较小时，结构表现出较强的几何非线性，而当初始预拉力较大时，结构表现出弱的非线性，文献[38]在计算节点位移时进行了一定的阐述。

前文对部分节点和部分单元的统计值在三种计算方案中的差异进行了研究，而实际上结构节点和单元较多，需要对所有内部非约束节点(边缘约束节点位移为 0)和所有单元的响应统计值在三种计算方案中的差异进行定量分析。定量分析响应统计值在不同计算方案中产生的差异(本章称为整体误差)依然采用式(2.36)所定义的夹角  $\theta$  和式(2.38)所定义的相对误差  $e$  两个参数：

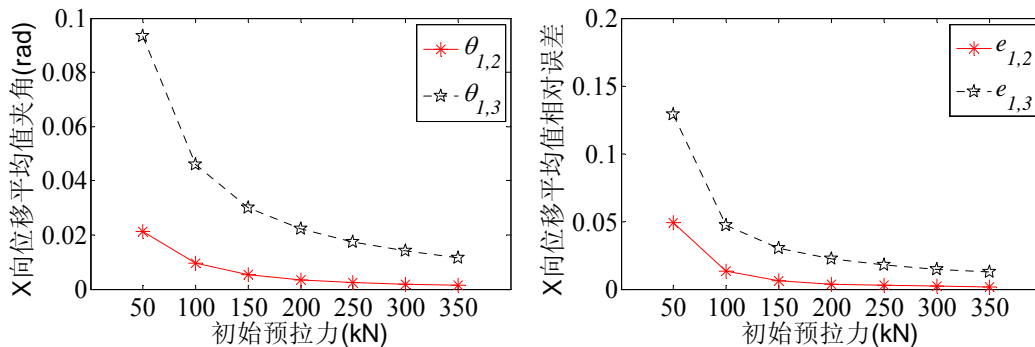
$$\theta = \arccos \left( \frac{\{X\}^T \{Y\}}{\|\{X\}\|_2 \|\{Y\}\|_2} \right) \quad (2.36)$$

和

$$e = \frac{\|\{X\} - \{Y\}\|_2}{\|\{Y\}\|_2} \quad (2.38)$$

式中， $\{X\}$  表示计算方案二、三中的所有内部非约束节点位移统计值或所有单元轴力统计值， $\{Y\}$  表示计算方案一中的所有内部非约束节点位移统计值或所有单元轴力统计值，本章认为是精确的。

初始预拉力对整体误差的影响见图 4.30 和图 4.31，图中， $\theta_{1,2}$ 、 $\theta_{1,3}$  分别表示计算方案一、二之间的夹角和计算方案一、三之间的夹角， $e_{1,2}$ 、 $e_{1,3}$  分别表示计算方案一、二之间的相对误差和计算方案一、三之间的相对误差(笔者注：本章后文中同样如此定义整体误差)。



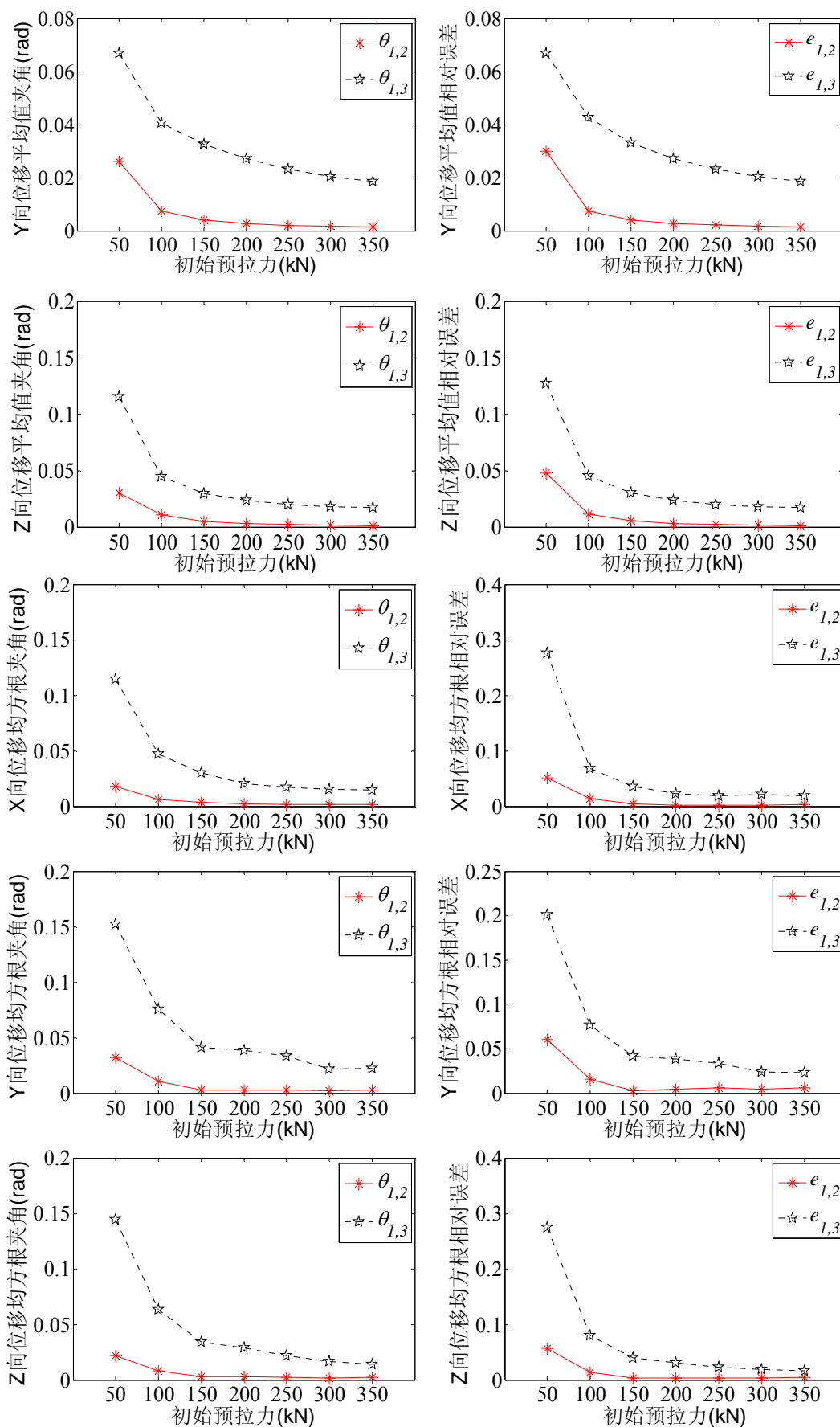


图 4.30 初始预拉力对节点位移统计值整体误差的影响

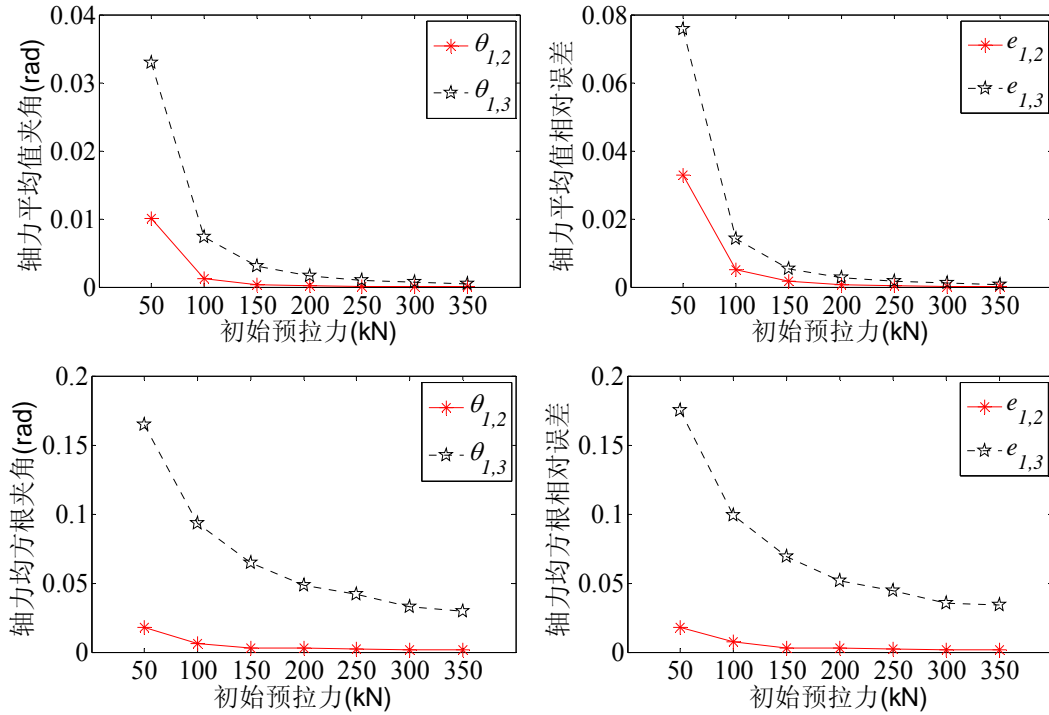
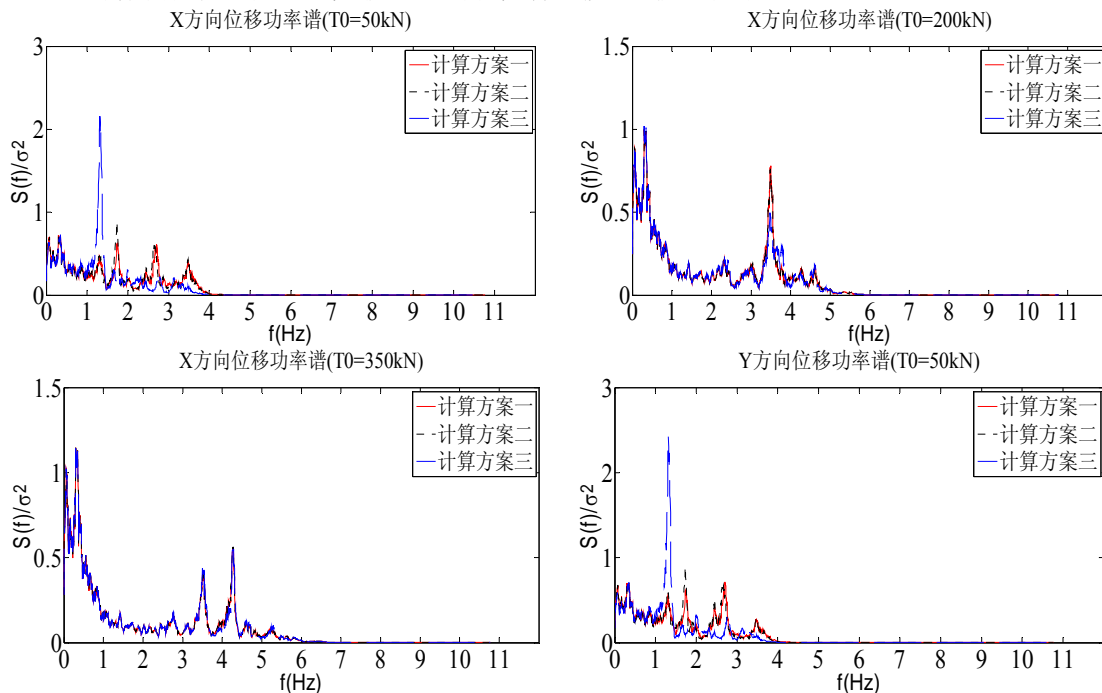


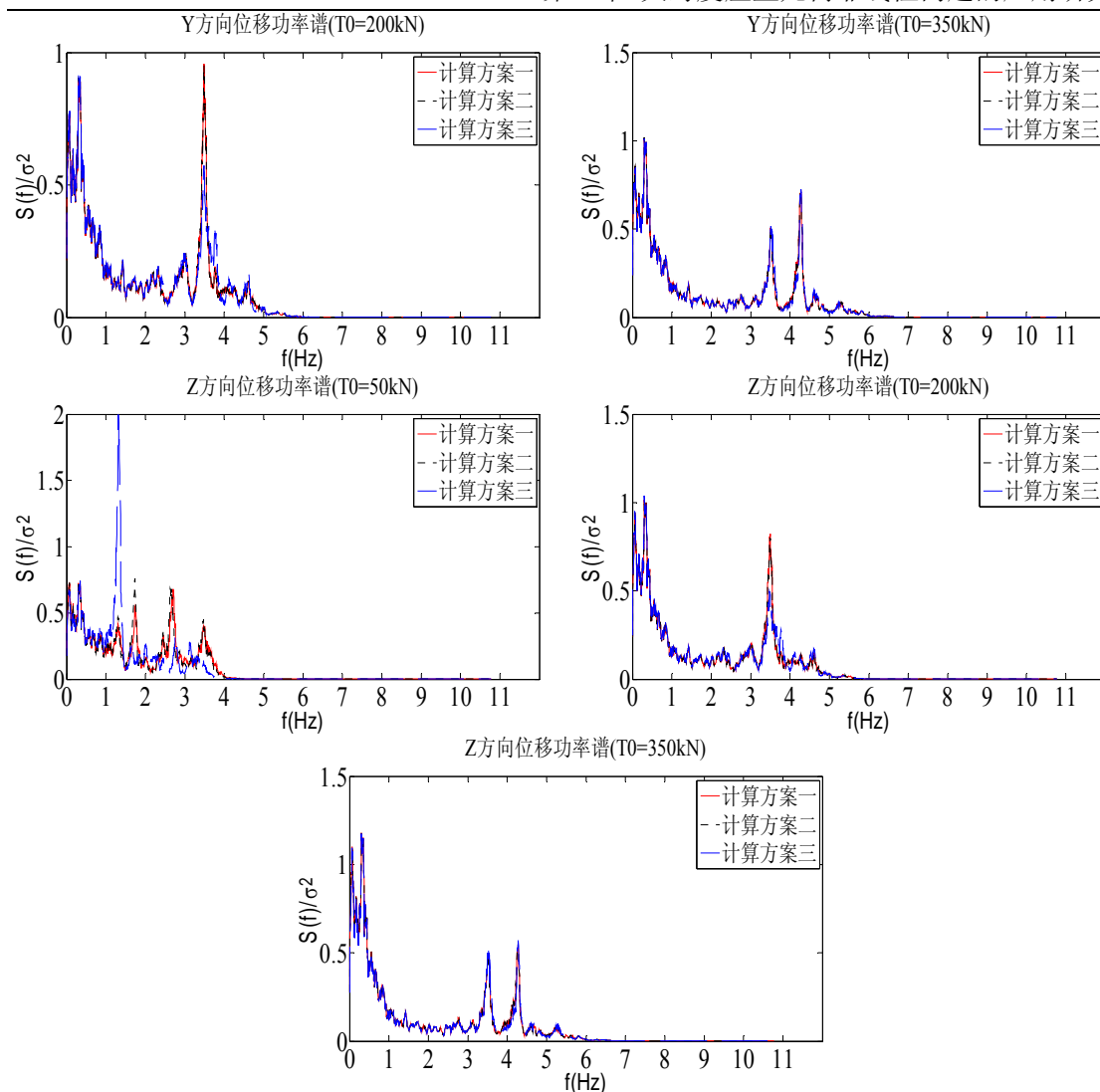
图 4.31 初始预拉力对单元轴力统计值整体误差的影响

由图 4.30 和图 4.31 可知：①计算方案一、二之间的整体误差  $\theta_{1,2}$  和  $e_{1,2}$  小于计算方案一、三之间的整体误差  $\theta_{1,3}$  和  $e_{1,3}$ ，尤其是在初始预拉力较小时；②当预拉力较小时，整体误差随预拉力的增加而快速减小，而当预拉力较大时，整体误差受预拉力大小的影响较小，逐渐趋于一个稳定值。

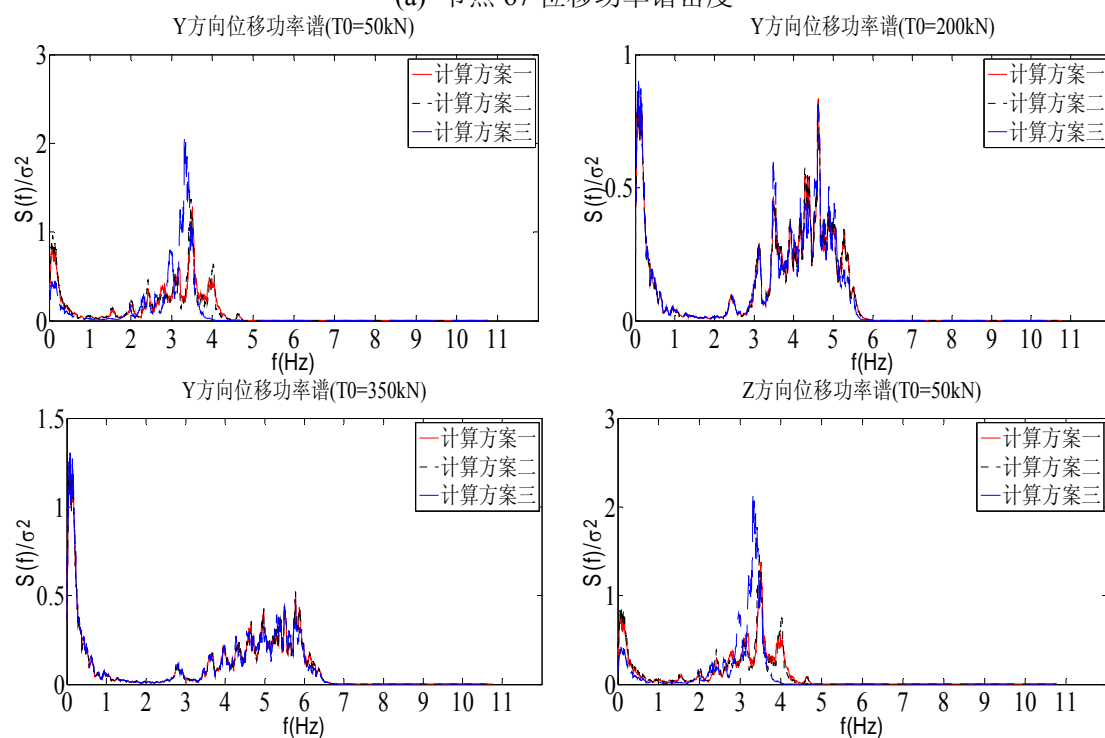
### 3) 初始预拉力对响应功率谱密度的影响

初始预拉力对节点位移响应功率谱密度的影响见图 4.32。





(a) 节点 67 位移功率谱密度



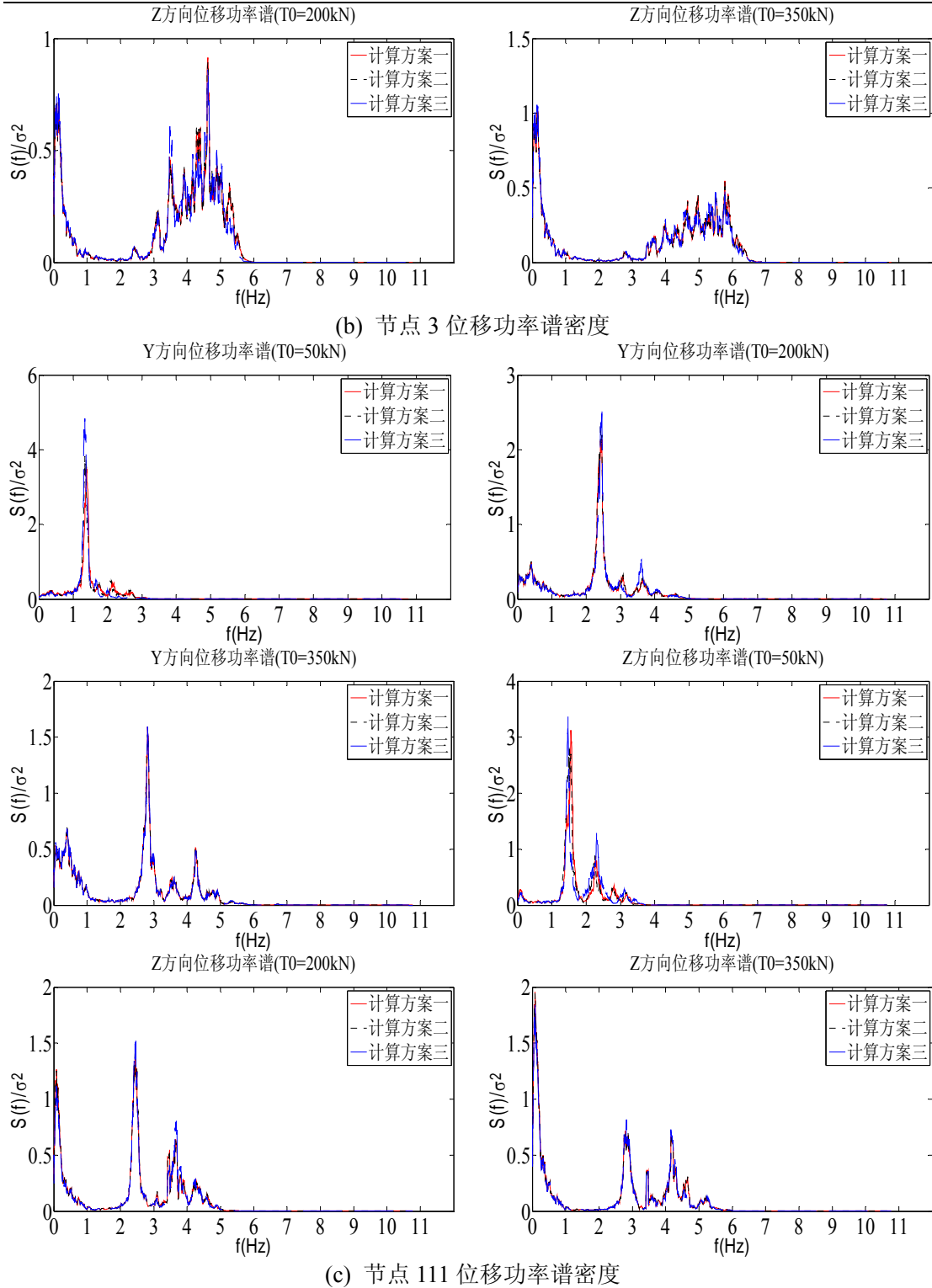
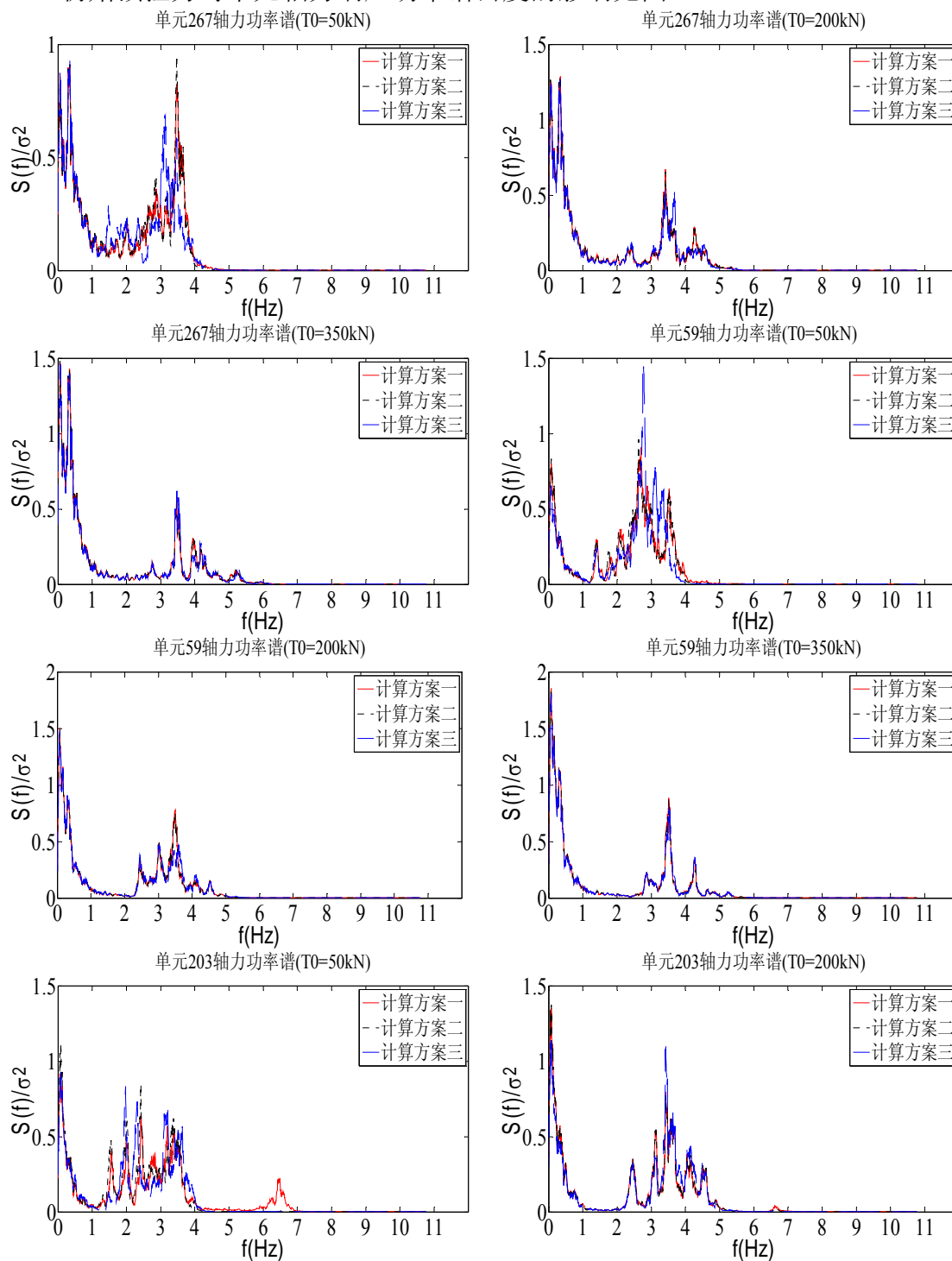


图 4.32 初始预拉力对节点位移功率谱密度的影响

由图 4.32 可知：①节点 111 处的平均风压(负值时为绝对值，下文同)和脉动风压相对较小(见图 4.10)，共振响应在总响应中较大，背景响应在总响应中较小，背景响应与共振响应分离比较明显。而且初始预拉力越小，共振响应越明显；②节点 67 和 3 处的平均风压和脉动风压都比较大(见图 4.10)，背景响应在总响应

中占有较大的比例,几乎与共振响应相当;③以节点111为例,当预拉力较小时,结构的非线性比较明显,在结构的基频(见图4.14)处并没有出现一个共振峰值,而当预拉力较大时(比如  $T_0=350\text{kN}$ ),结构呈现出弱的非线性,在结构的基频处几乎出现了一个明显的共振峰值。

初始预拉力对单元轴力响应功率谱密度的影响见图4.33。



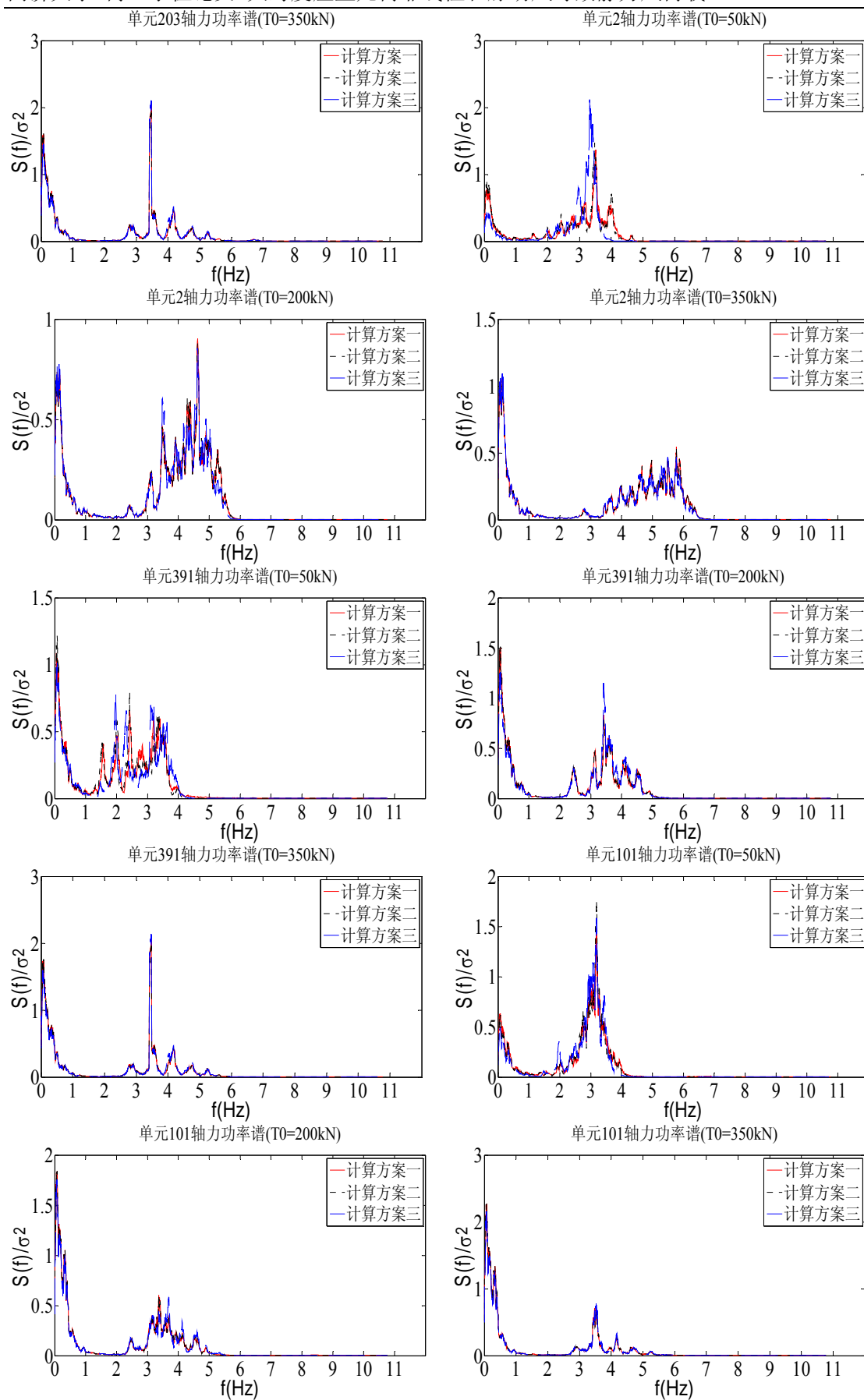


图 4.33 初始预拉力对单元轴力功率谱密度的影响



由图 4.33 可知：对于轴力来说，其背景响应和共振响应几乎相当，没有哪一种分量占据着绝对的主导地位。

同时由图 4.32 和图 4.33 可知：①总的来说，响应功率谱密度带宽较宽，结构的非线性振动是一个需要考虑多频率的宽带过程；②预拉力越小，响应功率谱密度带宽频段也越小，预拉力越大，功率谱密度的带宽频段也越大；③在同一初始预拉力下，不同响应的功率谱密度形状差异较大。此外对于不同响应而言，背景响应与共振响应占总响应的比例并不一样，不能简单地认为结构主要由背景响应或共振响应为主。这些都体现了索网结构非线性风致响应的复杂性。

#### 4) 初始预拉力对阵风响应因子的影响

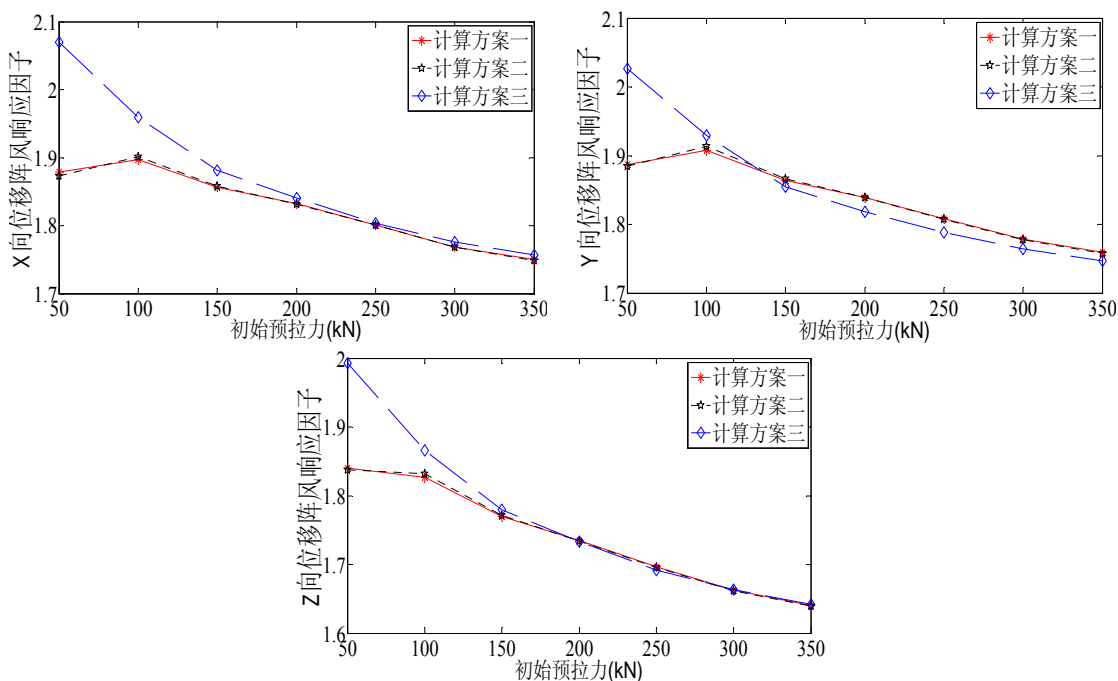
为了大致了解纯风荷载下的结构风振响应概况，本章拟采用阵风响应因子来进行考虑。所谓阵风响应因子指的是风引起的可能最大响应与平均风引起的响应之比[38]，根据本章计算的实际情况，特将其定义如下：

$$\beta = \frac{\bar{r}_T - r_{D+S} + g \cdot \text{sign}(\bar{r}_T - r_{D+S})\sigma_T}{\bar{r}_T - r_{D+S}} \quad (4.1)$$

$$= 1 + \frac{g \cdot \text{sign}(\bar{r}_T - r_{D+S})\sigma_T}{\bar{r}_T - r_{D+S}}$$

式中， $\bar{r}_T$ 、 $\sigma_T$  分别表示在自重、初始预拉力和总风荷载作用下结构的非线性响应平均值和均方根，即三种计算方案中响应的平均值和均方根； $r_{D+S}$  表示结构在自重、初始预拉力作用下的非线性响应，即计算方案三中的静力非线性响应； $g$  表示峰值因子，本章取为 2.5； $\text{sign}(\cdot)$  表示符号算子。

初始预拉力对阵风响应因子的影响见图 4.34 和图 4.35。



(a) 节点 67 的位移阵风响应因子

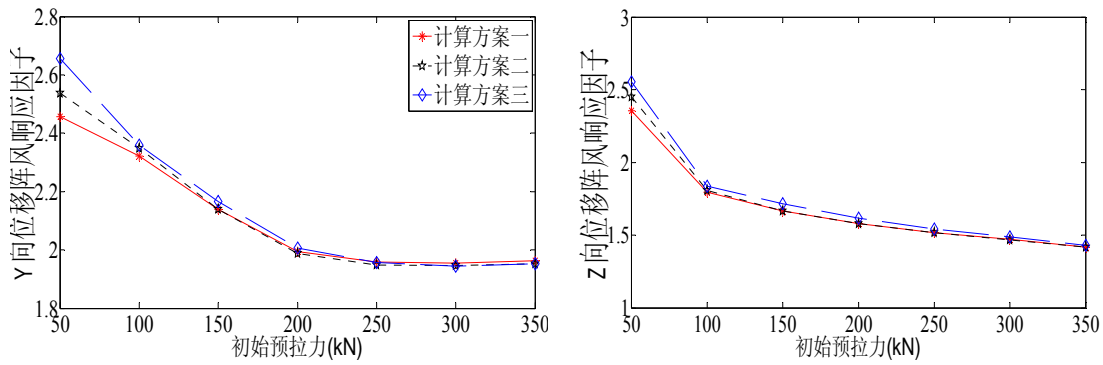
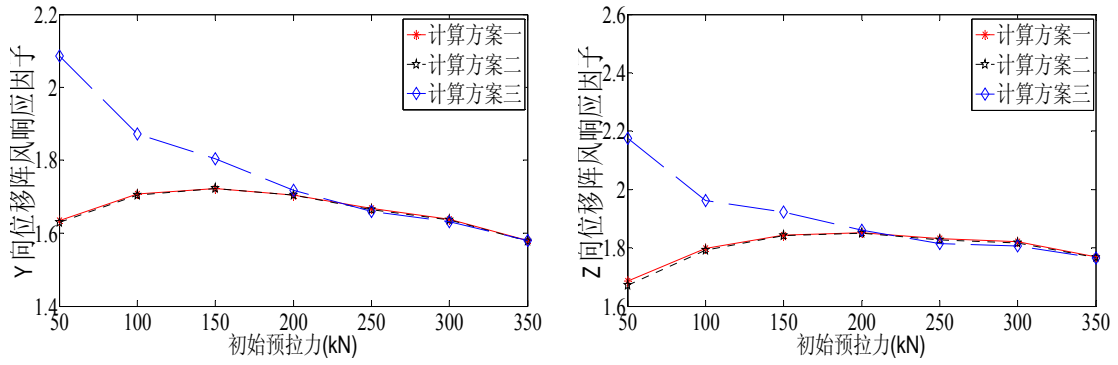
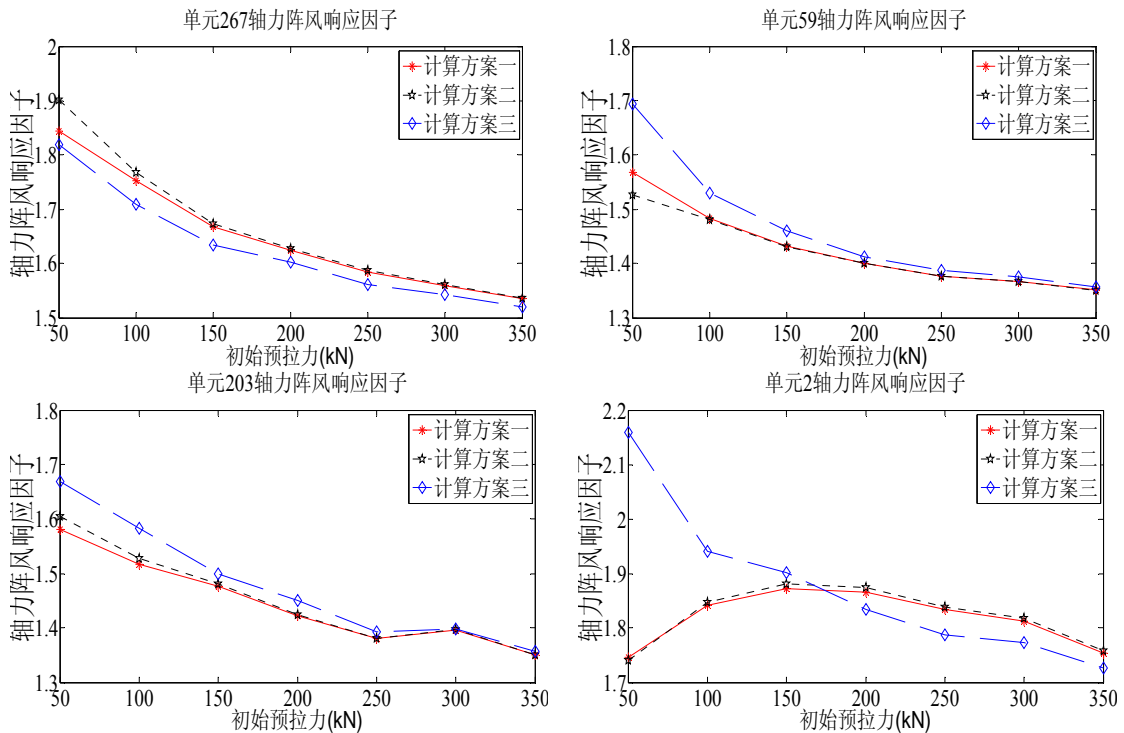


图 4.34 初始预拉力对节点位移阵风响应因子的影响



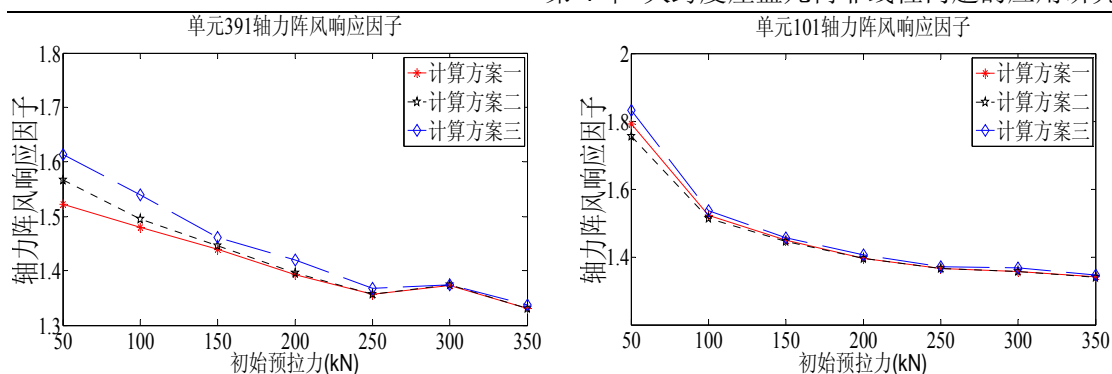


图 4.35 初始预拉力对单元轴力阵风响应因子的影响

由图 4.34 和图 4.35 可知：①阵风响应因子随着节点位置和单元位置的不同而不同，而且也随着初始预拉力的变化而变化，阵风响应因子通常不能取为一常量，这与文献[38]的结论是一致的；②大体上说当预拉力较小时，阵风响应因子变化较大，而当初始预拉力较大时，阵风响应因子变化较小，基本趋于一个常数。

### 5) 三种计算方案的对比分析

前文就初始预拉力对响应的影响进行了较为详细的阐述，本章在此对三种计算方案的结果进行对比分析，由图 4.28~图 4.35 不难得知：

- (1) 当初始预拉力较小时，三种计算方案存在着一定的差异，而当预拉力较大时，差异较小。
- (2) 无论预拉力大小如何，计算方案一、二之间的差异总体较计算方案一、三之间的差异小。由于悬索屋盖对风荷载比较敏感，需要对这种结构进行准确的动力风致响应研究[35]，如果采用近似计算方案时，宜采用方案二考虑平均风荷载引起的非线性，不过文献[50]也指出该方案也局限于弱的非线性结构。

#### 4.3.3.2 断面面积对自振频率、模态和响应的影响

在进行风致响应计算时，还需要考虑索断面面积  $A$  的影响。本小节将研究断面面积在单独变化时对自振频率、模态和响应的影响，参数取值为：初始预拉力  $T_0 = 70\text{kN}$ ，分布荷载为  $FD = 700\text{N/m}^2$ ，索断面面积(笔者注：为了讨论方便，本章在此没有根据规范[173]取值)  $A = 80.160, 240, 320, 400, 480, 560\text{mm}^2$ ，风荷载依然采用本章前文的结果。

#### 1、断面面积对自振频率的影响

在计算方案一、二和三中，断面面积对时程计算时初始位形的自振频率的影响分别见图 4.36、图 4.37 和图 4.38。

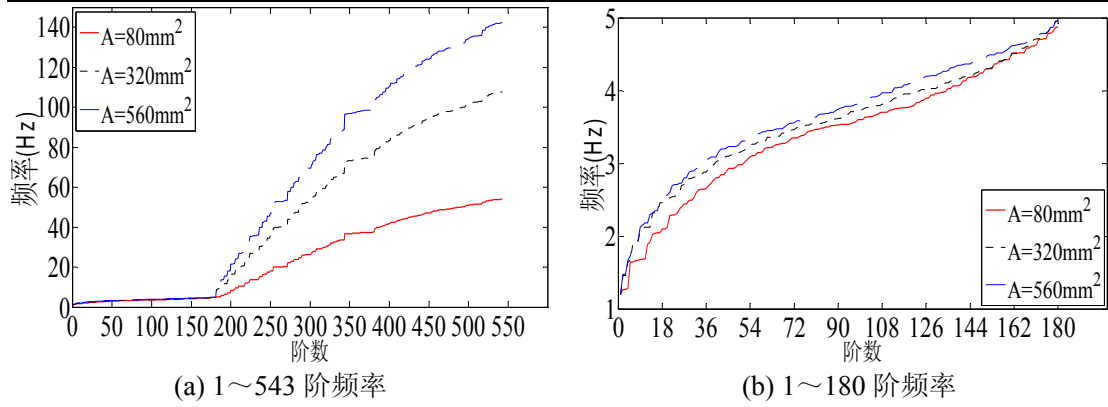


图 4.36 计算方案一中断面面积对自振频率的影响

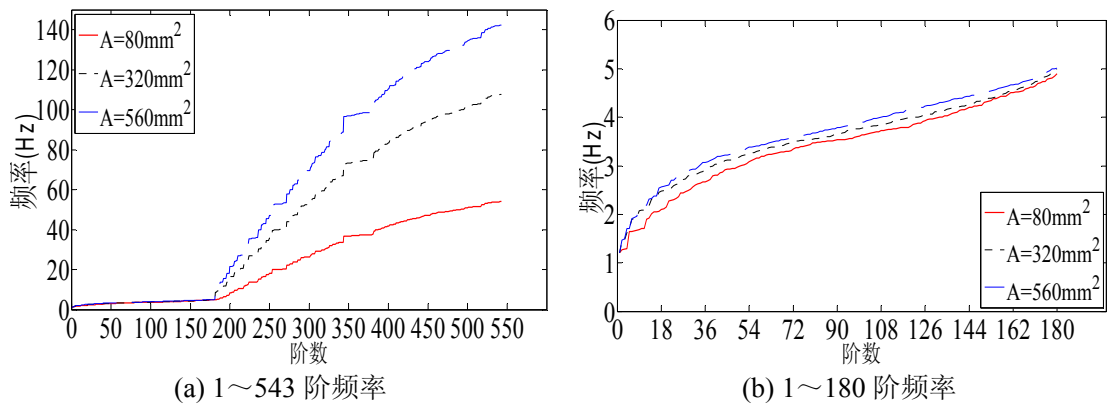


图 4.37 计算方案二中断面面积对自振频率的影响

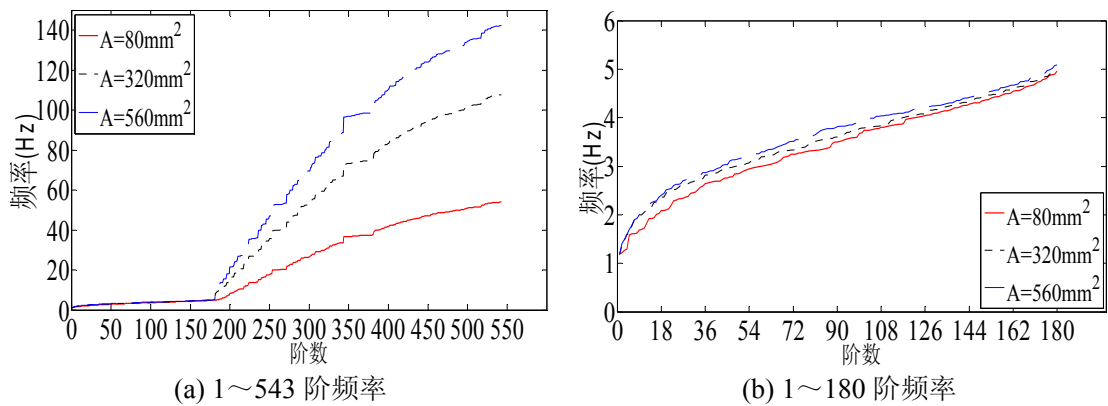


图 4.38 计算方案三中断面面积对自振频率的影响

由图 4.36~图 4.38 可知：①在结构的低频段，断面面积的大小对自振频率影响较小，在高频段，断面面积对自振频率的影响却很大，自振频率随着断面面积的增加而增加；②在低频段中，结构的频率非常密集，呈连续分布，因此在对结构进行动力分析时，依然需要考虑多个低阶频率对 Rayleigh 阻尼矩阵的影响。结构频率依然大致在第 181 阶后产生较为明显的增长；③断面大小在通常范围内对索网的自振频率特别是基频几乎无影响，在所计算范围内改变索的截面，对结构的自振频率均不产生明显变化[174]。文献[38]也认为自振频率几乎不随断面面

积的变化而变化。但是需要注意的是,文献[38; 174]并没有指出断面面积对高频段的影响特征。

在此需要指出的是,本小节在用式(3.75)计算 $a_0$ 和 $a_1$ 时,根据上述频率特点依然考虑了结构前180阶频率的影响, $\omega_i$ 和 $\omega_j$ 取法同本章前文。

本章在此也同样分析在相同面积情况下不同计算方案之间的1~180阶频率之间的差异,见图4.39。

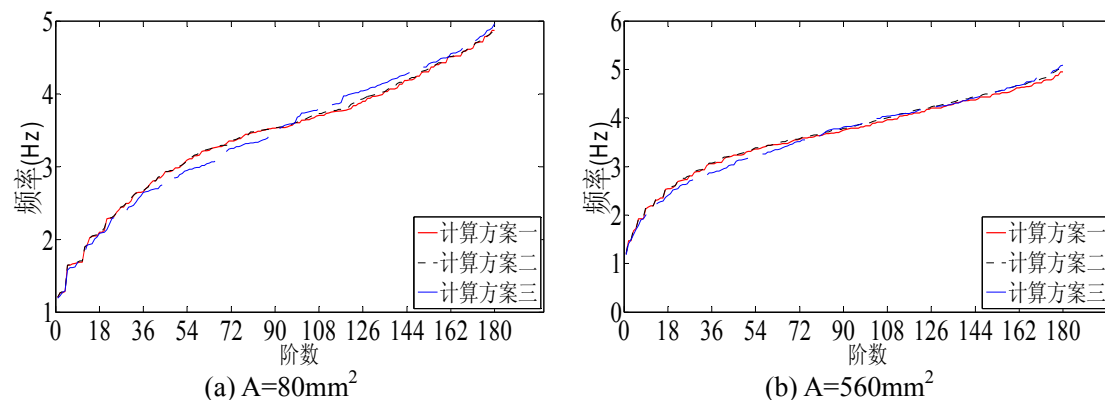
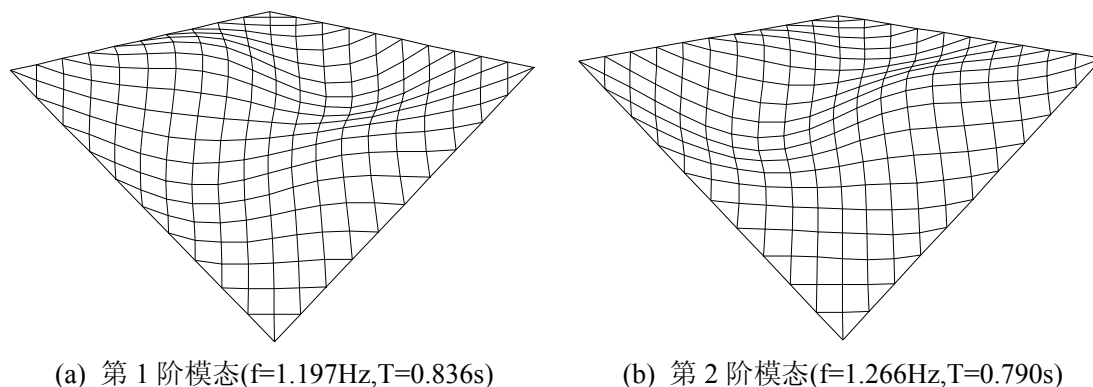


图 4.39 相同断面面积情况下、不同计算方案之间的低频段之间的差异

由图 4.39 可知,断面面积的大小对不同计算方案之间的频率影响不大,不过方案一、二之间几乎没有差异,而方案三与其它方案之间还是存在着少许差异,尤其是在断面面积较小时。

## 2、断面面积对结构模态的影响

在计算方案一、二和三中,断面面积对时程计算时初始位形的结构模态的影响分别见图 4.40~图 4.42、图 4.43~图 4.45 和图 4.46~图 4.48。



(a) 第1阶模态( $f=1.197\text{Hz}$ ,  $T=0.836\text{s}$ )

(b) 第2阶模态( $f=1.266\text{Hz}$ ,  $T=0.790\text{s}$ )

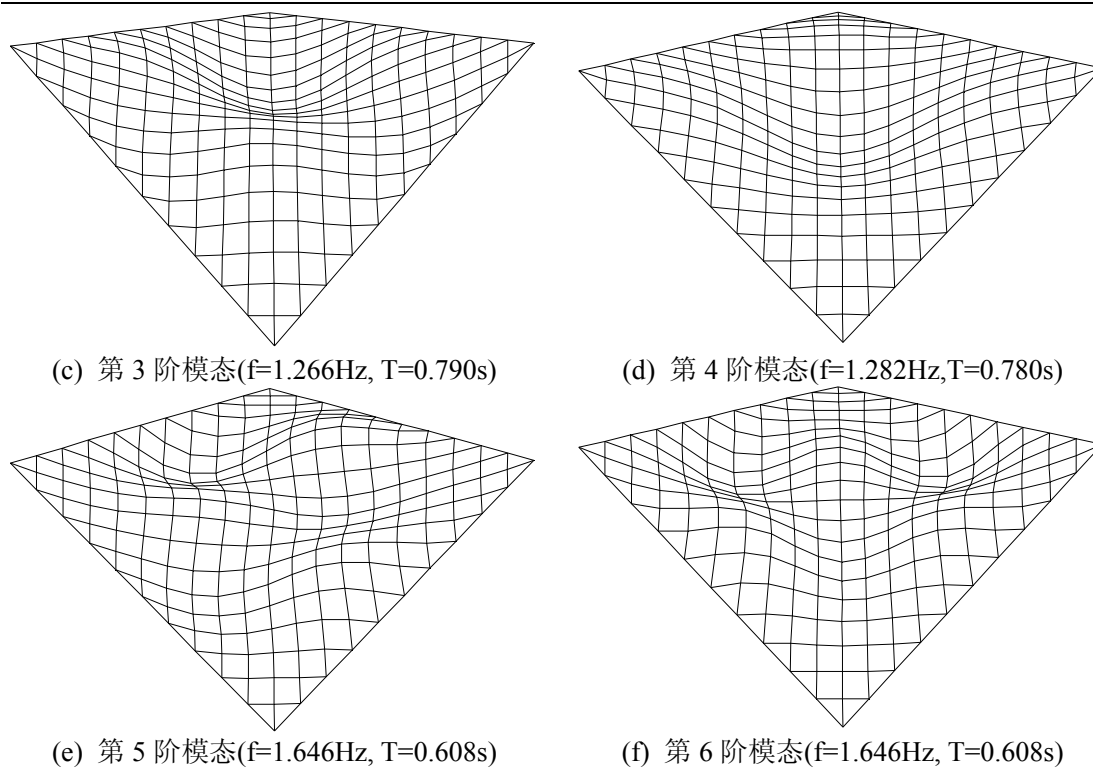
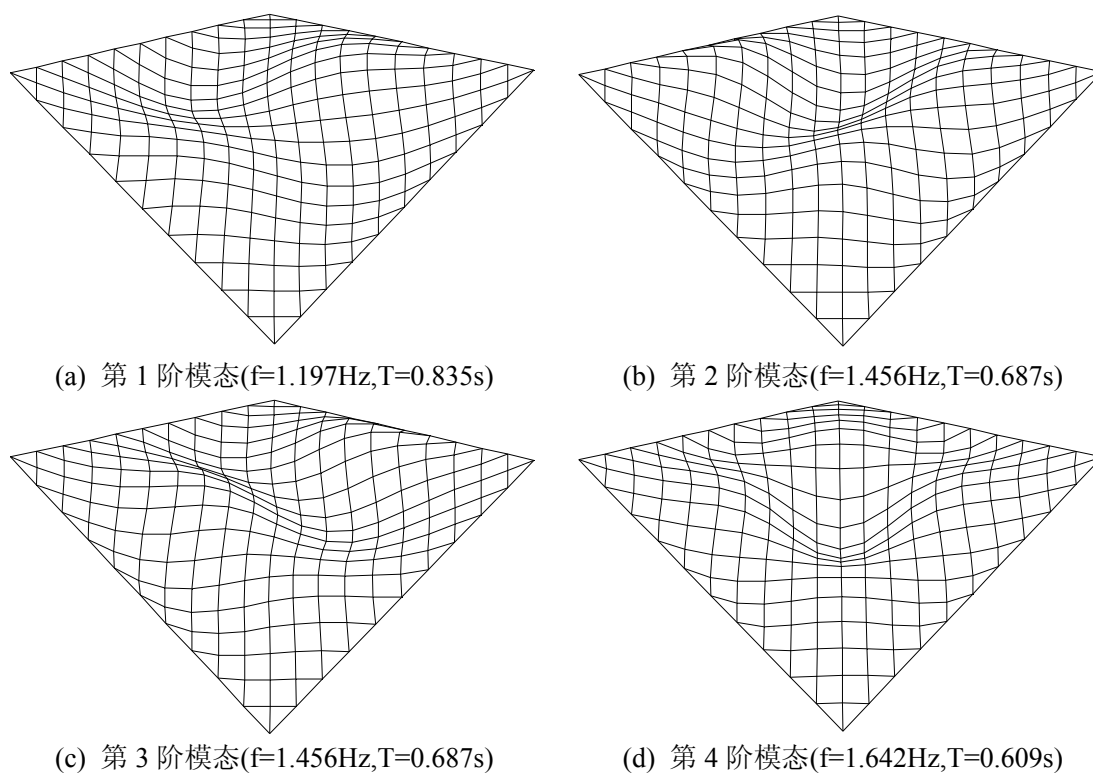


图 4.40 计算方案一中断面面积  $A=80\text{mm}^2$  时的部分结构模态



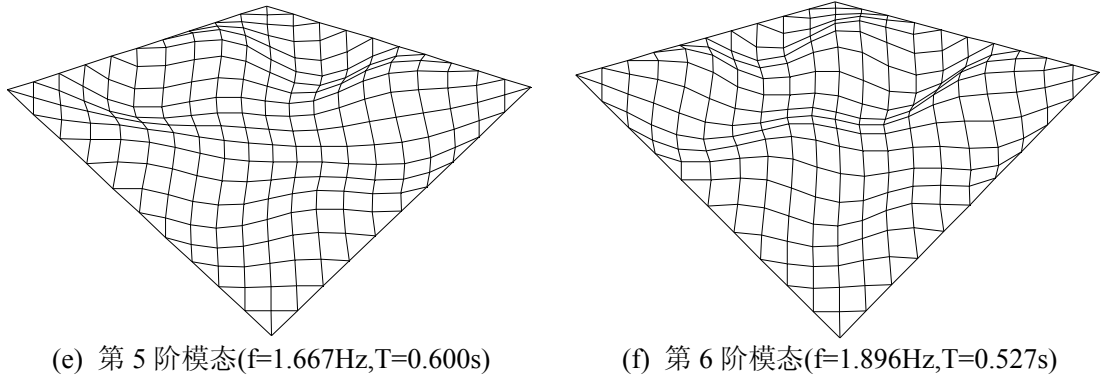


图 4.41 计算方案一中断面面积  $A=320\text{mm}^2$  时的部分结构模态

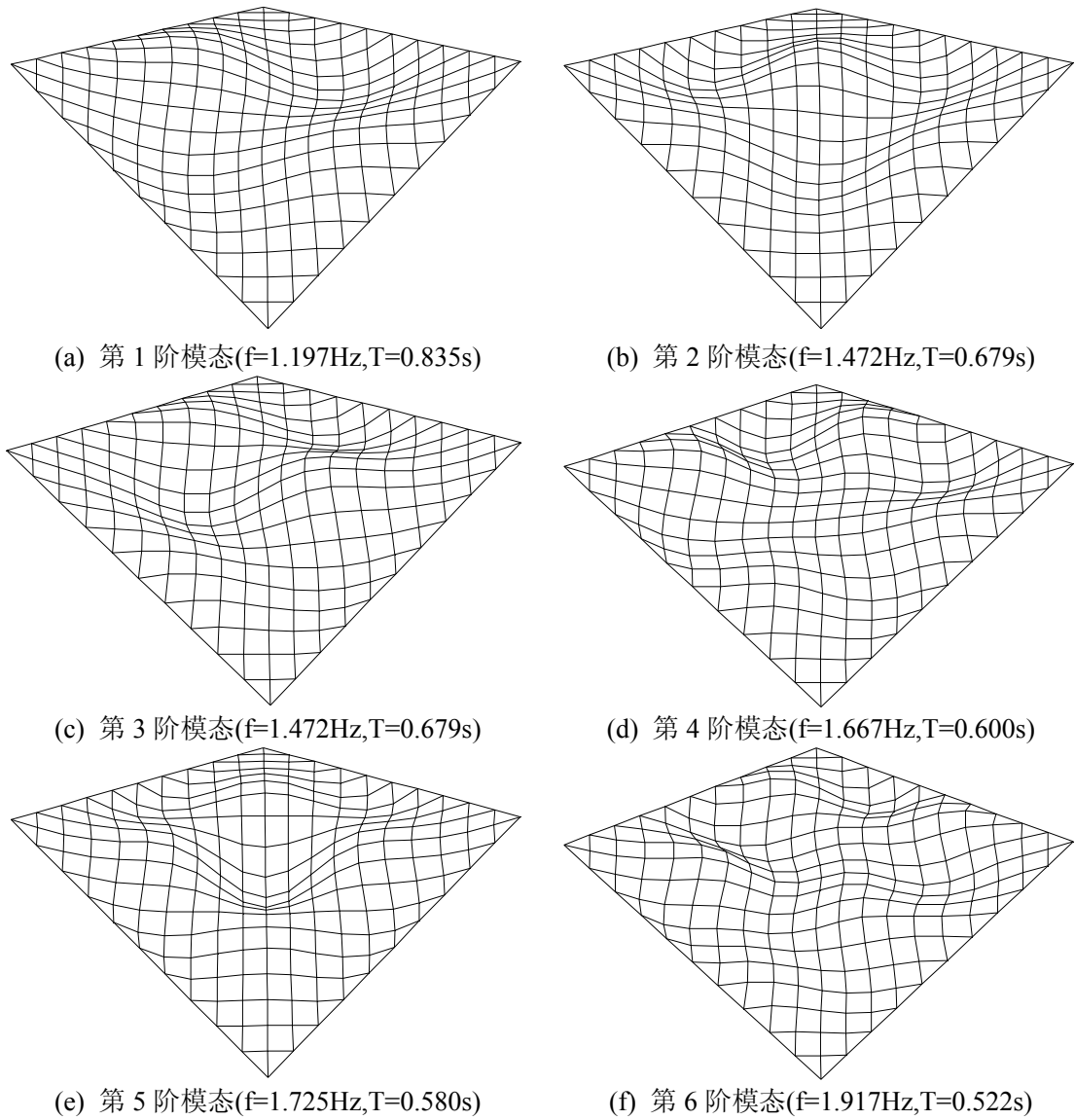


图 4.42 计算方案一中断面面积  $A=560\text{mm}^2$  时的部分结构模态

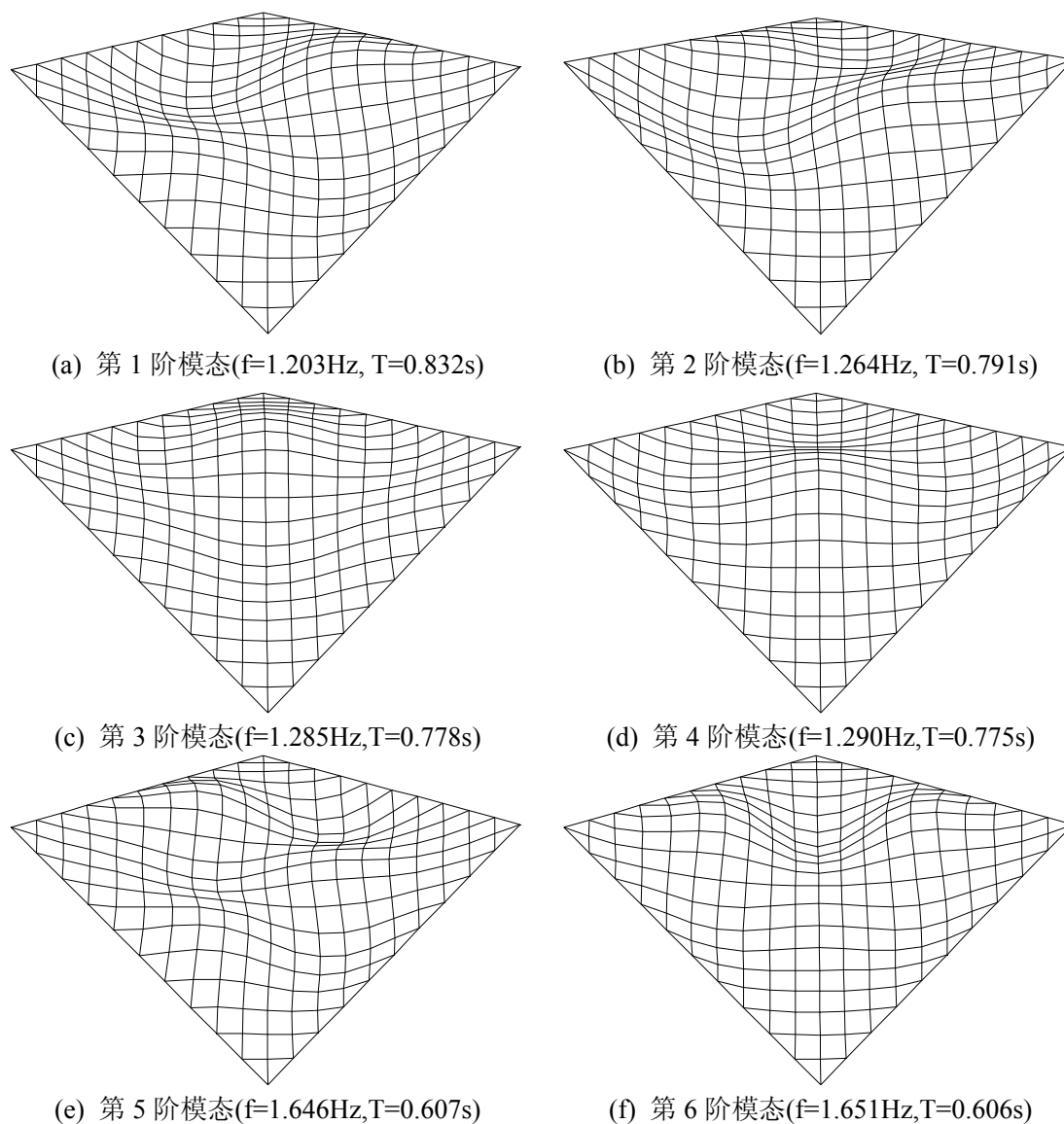
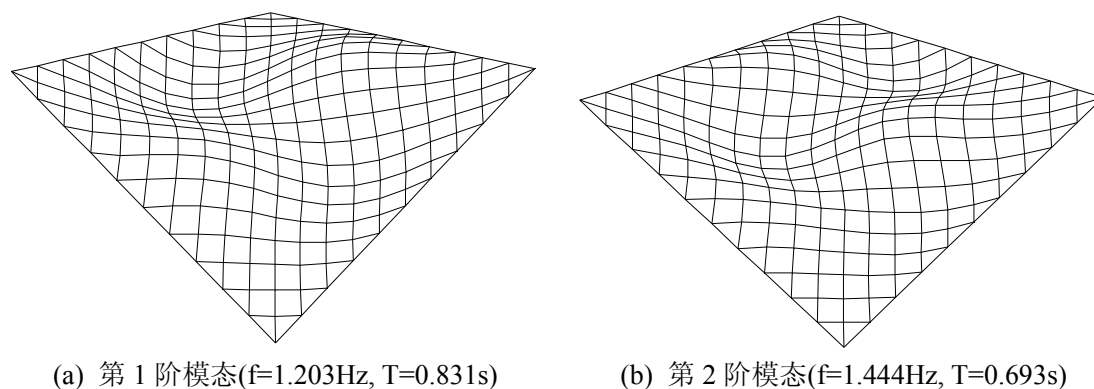


图 4.43 计算方案二中断面面积  $A=80\text{mm}^2$  时的部分结构模态





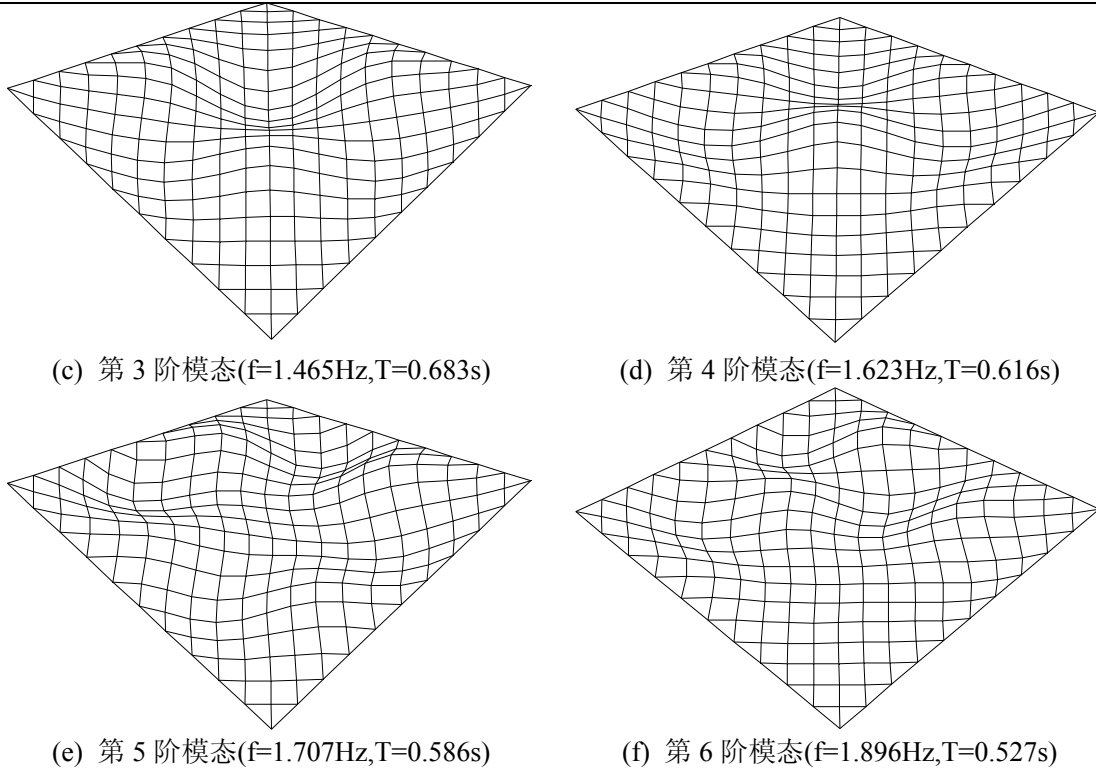
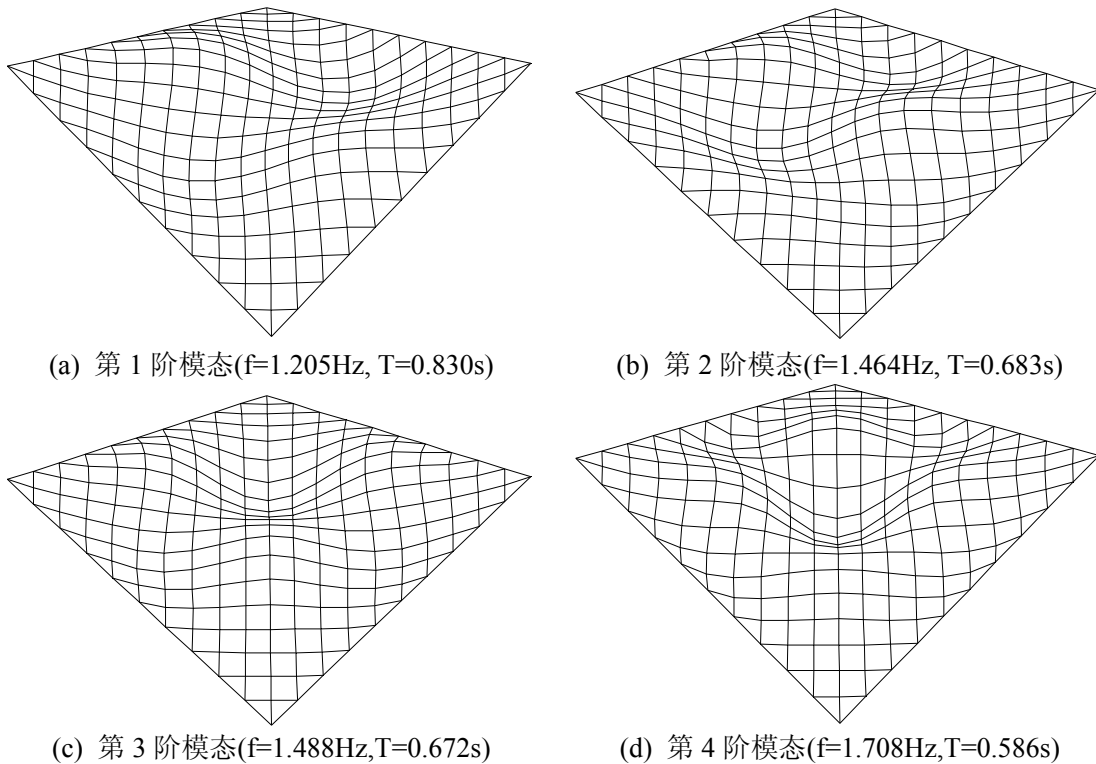


图 4.44 计算方案二中断面面积  $A=320\text{mm}^2$  时的部分结构模态



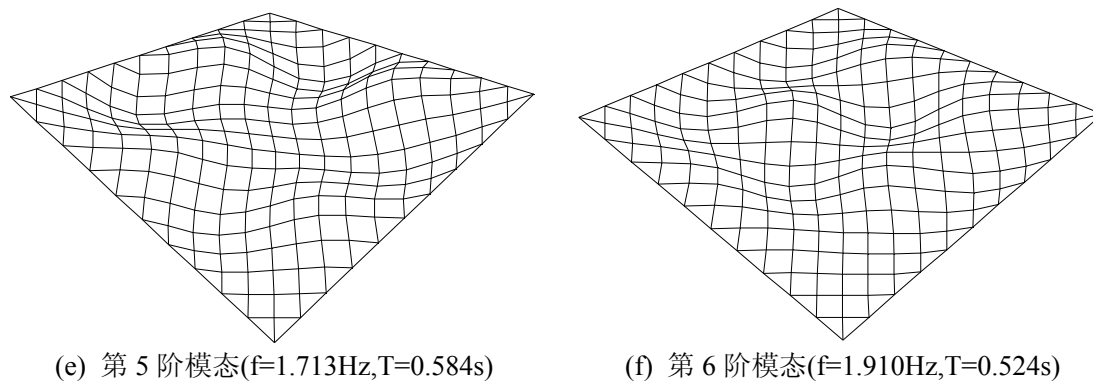


图 4.45 计算方案二中断面面积  $A=560\text{mm}^2$  时的部分结构模态

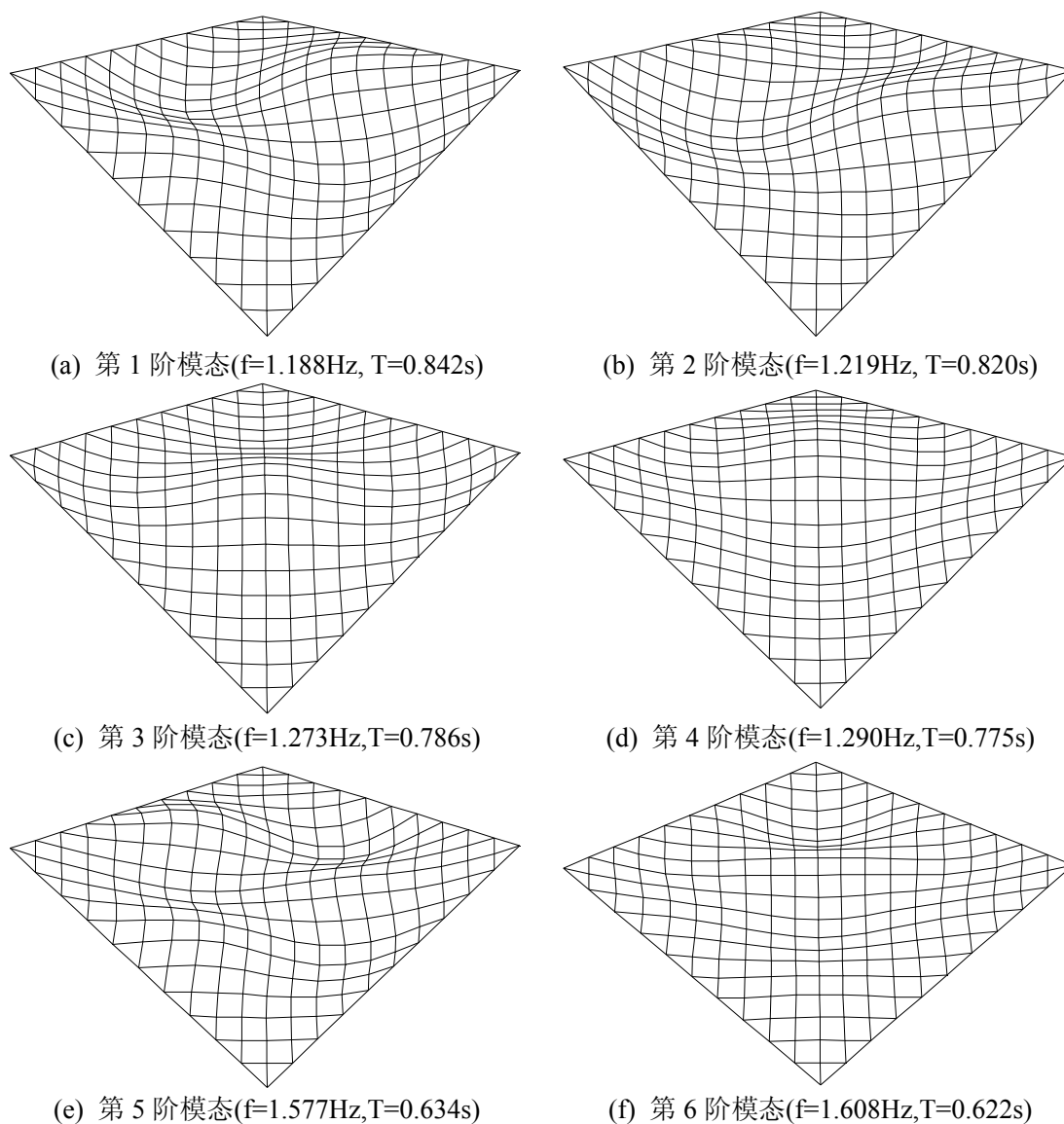


图 4.46 计算方案三中断面面积  $A=80\text{mm}^2$  时的部分结构模态

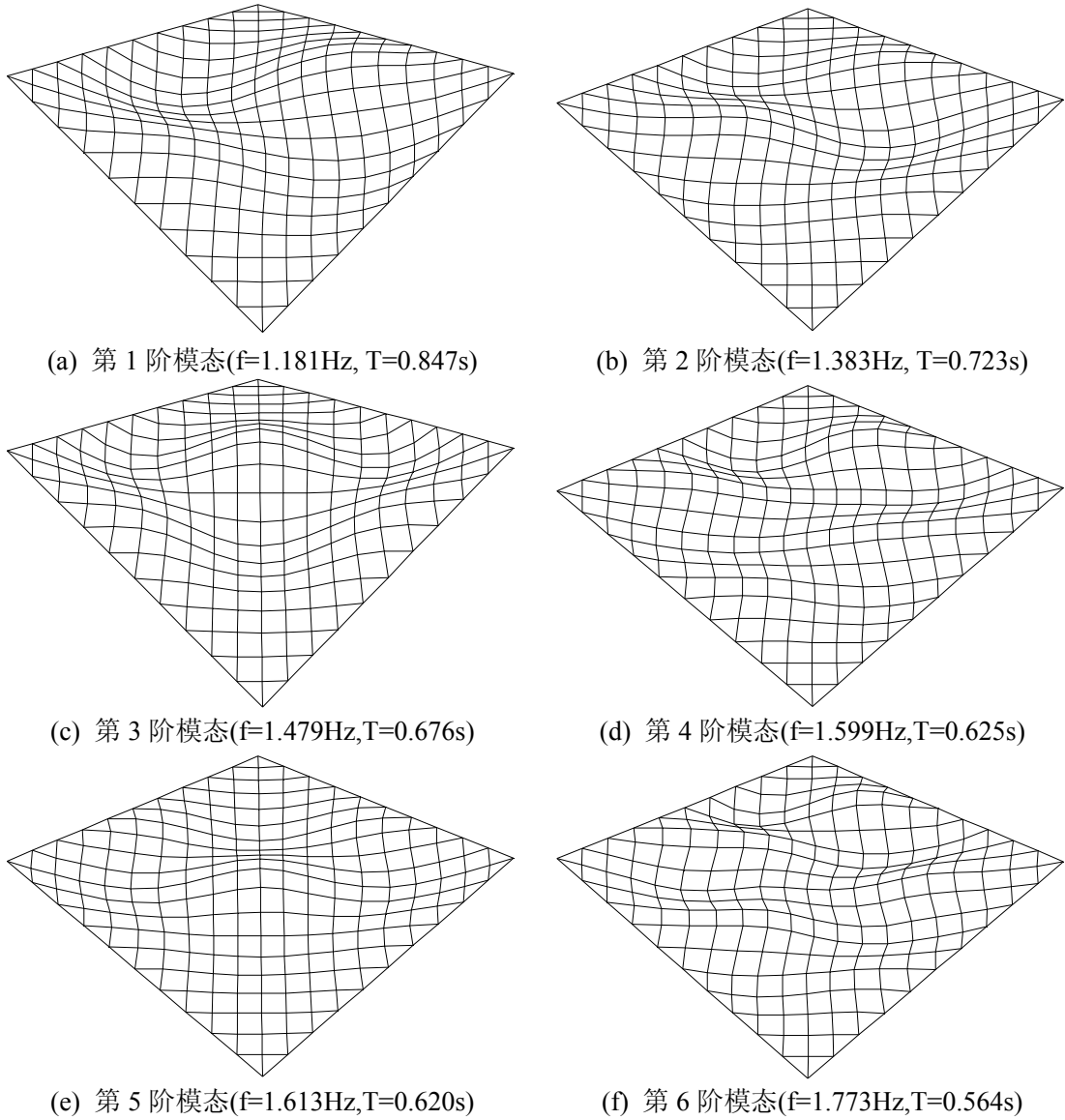
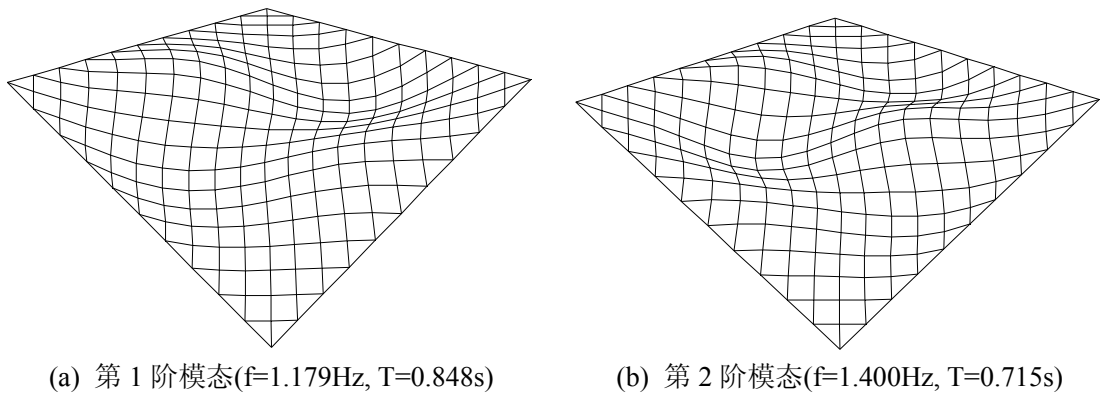


图 4.47 计算方案三中断面面积  $A=320\text{mm}^2$  时的部分结构模态



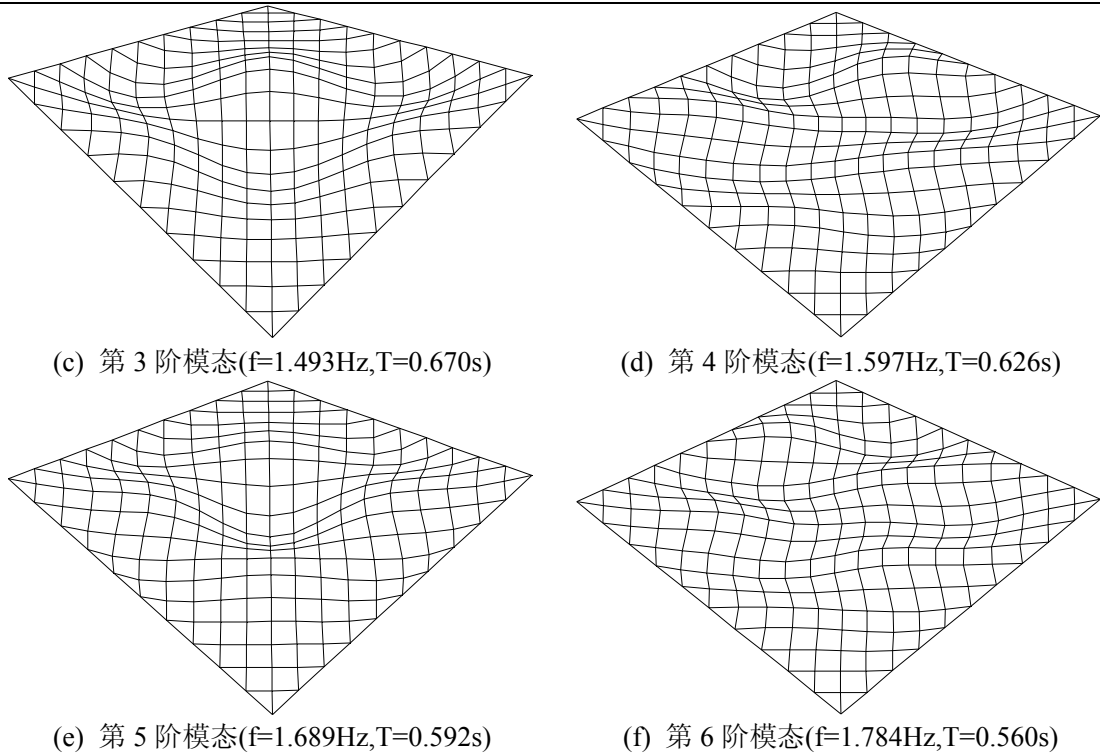


图 4.48 计算方案三中断面面积  $A=560\text{mm}^2$  时的部分结构模态

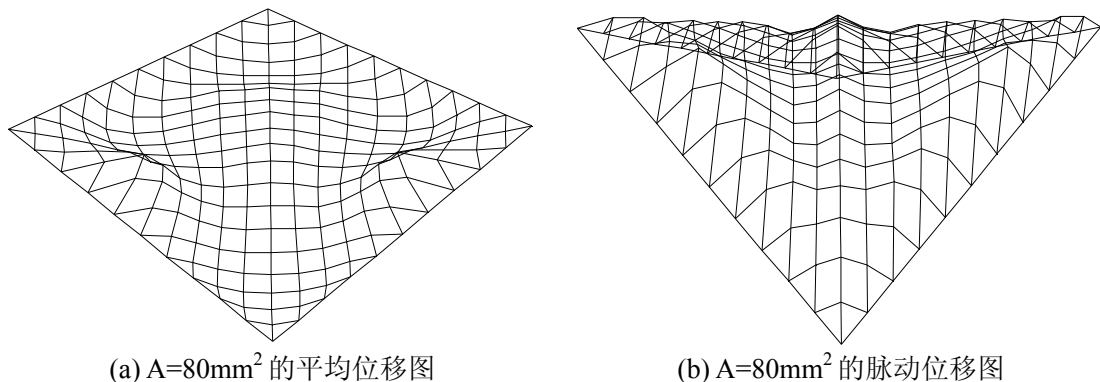
由图 4.40~图 4.48 可知：①多数情况下，结构前若干阶模态依然为单轴或双轴反对称形式，结构的第 1 阶模态依然为双轴反对称形式；②各阶模态在两个方向上依然均为多波曲线，整个曲面变化复杂，阶数越高，模态形状越复杂；③在同一计算方案中，不同的断面面积使得同阶模态的形状也存在一定的差异，不过在计算方案二、三中，当断面面积较大时，同阶模态的形状具有一定的相似性；④同一断面面积下不同计算方案的同阶模态形状有些相似，有些相差较大。

### 3、断面面积对响应的影响

本小节将分析断面面积  $A$  对响应统计值、响应功率谱密度和阵风响应因子的影响，对比分析三种计算方案的差异。

#### 1) 断面面积对结构变形的影响

不同断面面积情况下的结构变形见图 4.49~图 4.51。



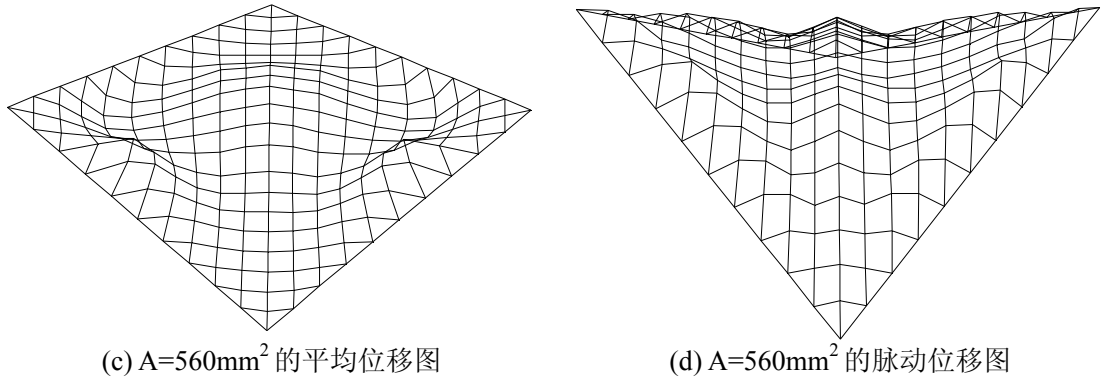


图 4.49 计算方案一中断面面积对结构变形的影响

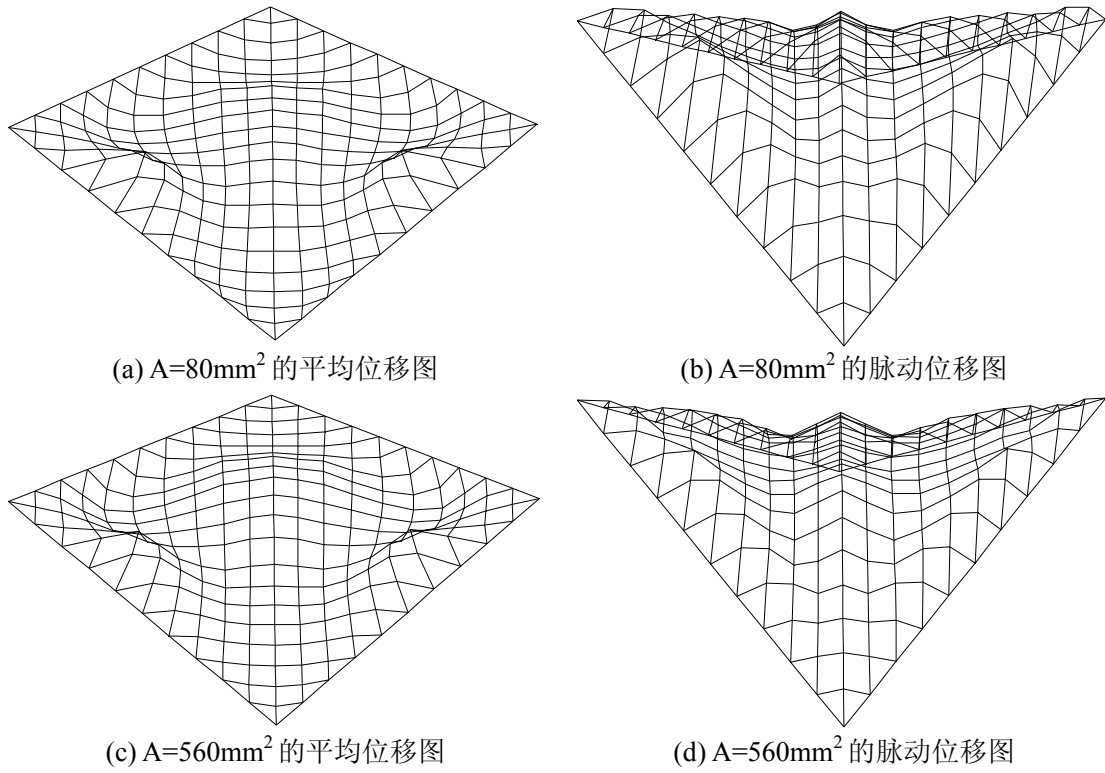
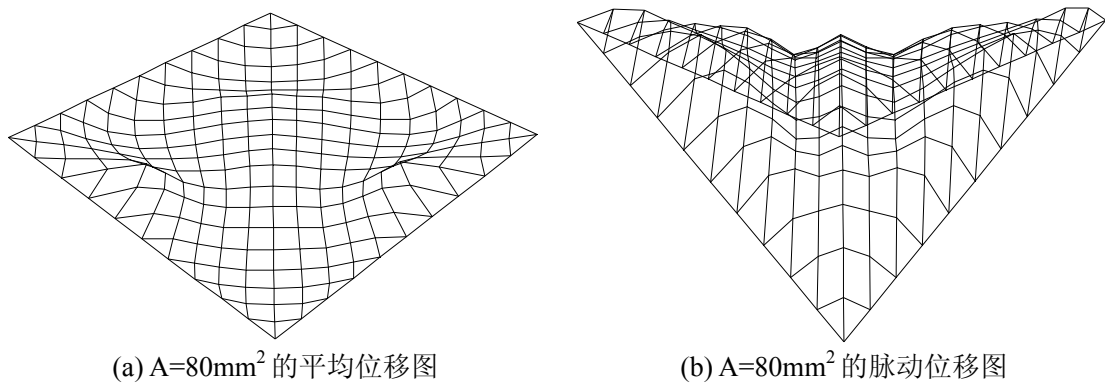


图 4.50 计算方案二中断面面积对结构变形的影响



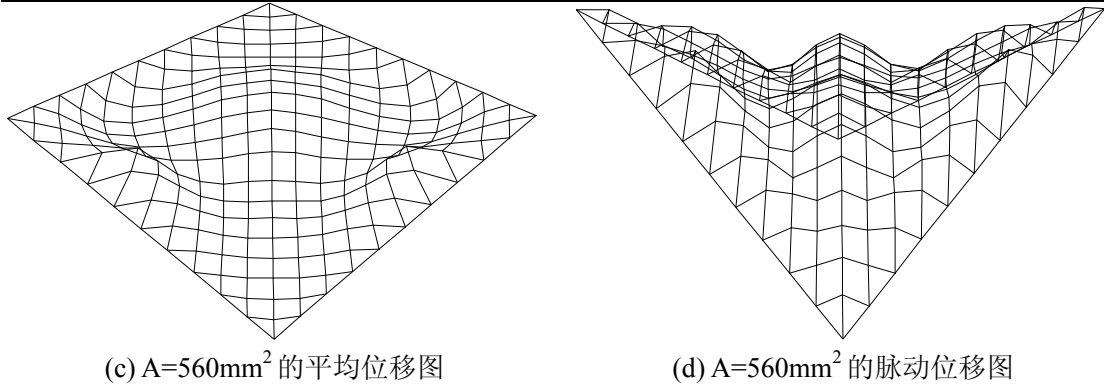
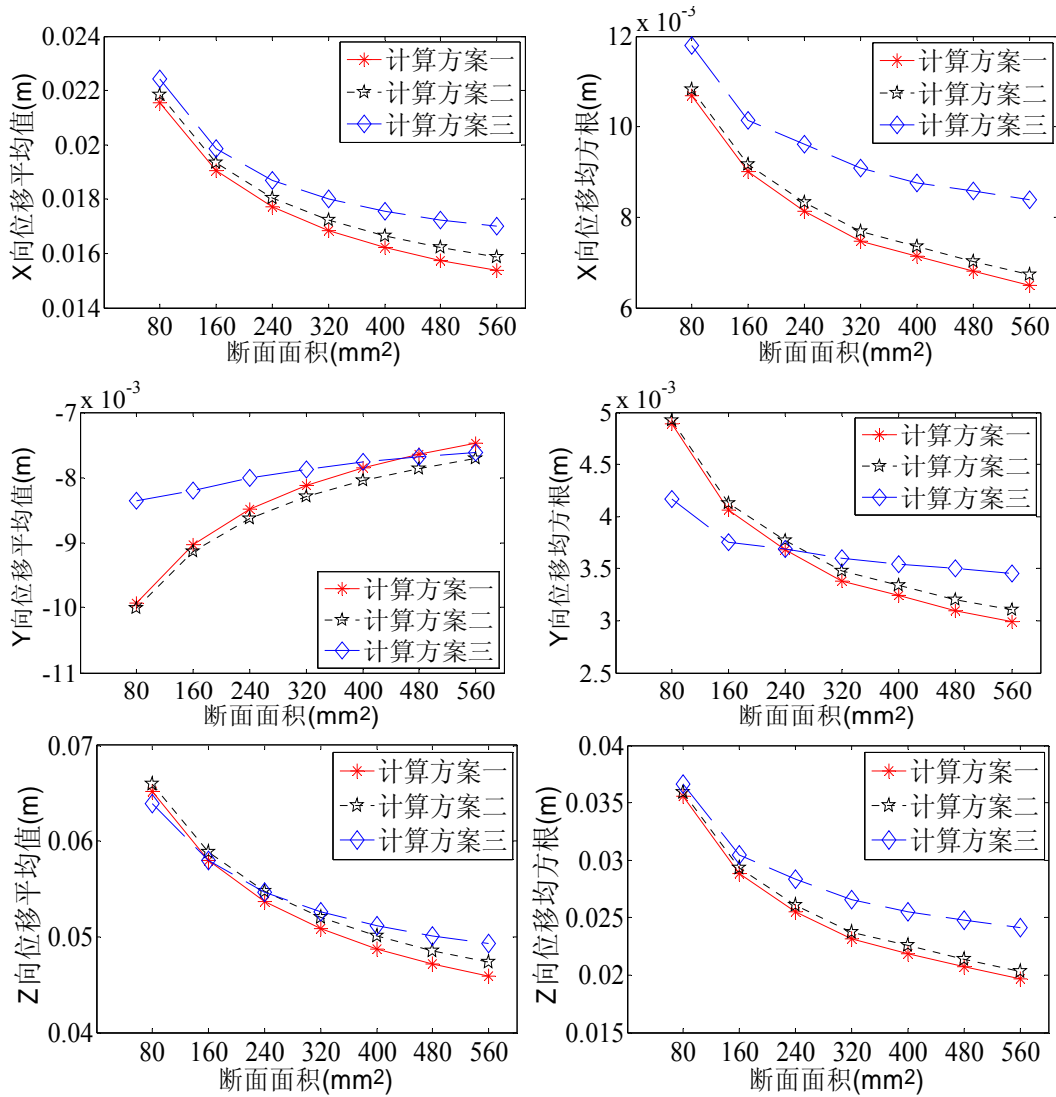


图 4.51 计算方案三中断面面积对结构变形的影响

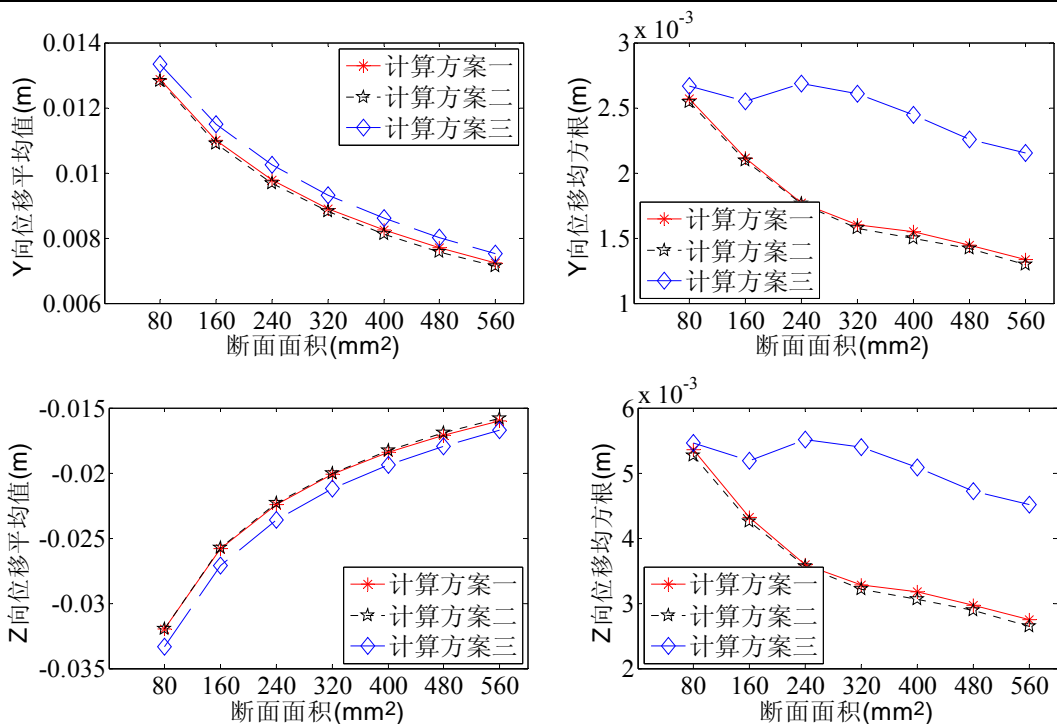
由图 4.49~图 4.51 可知，从整体的结构变形的角度来看，在同一计算方案中，屋盖变形受断面面积大小的影响较初始预拉力小。

## 2) 断面面积对响应统计值的影响

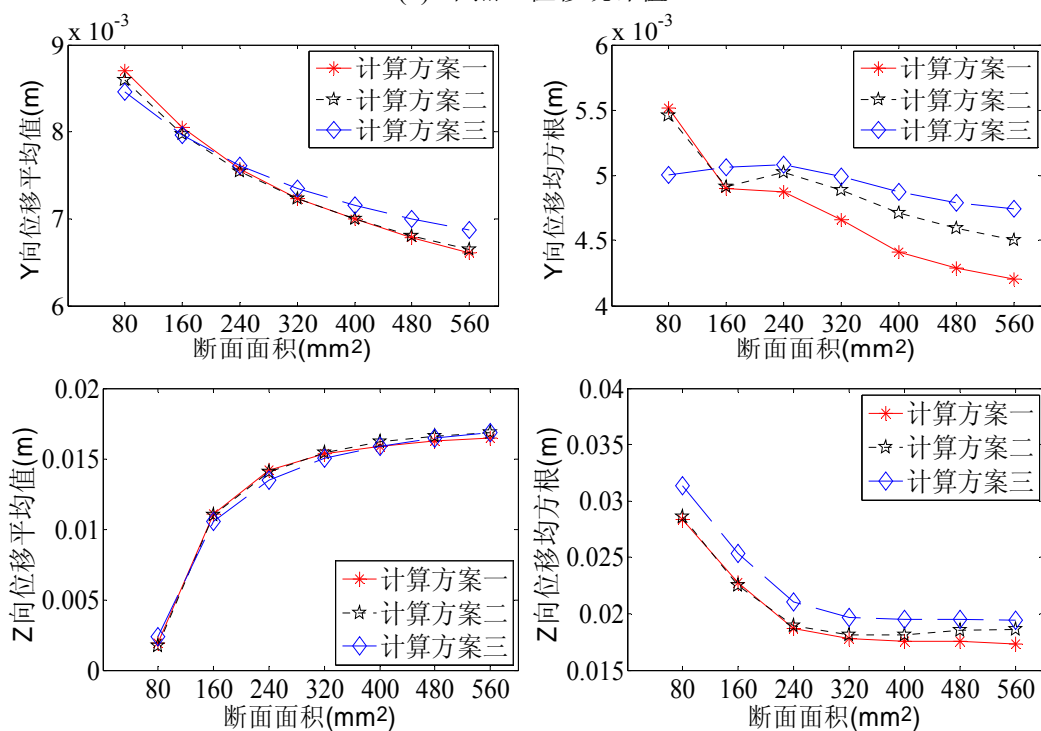
断面面积对所研究节点和单元的响应统计值的影响见图 4.52 和图 4.53。



(a) 节点 67 位移统计值

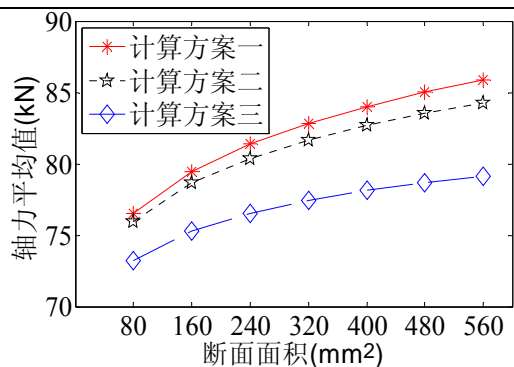


(b) 节点 3 位移统计值

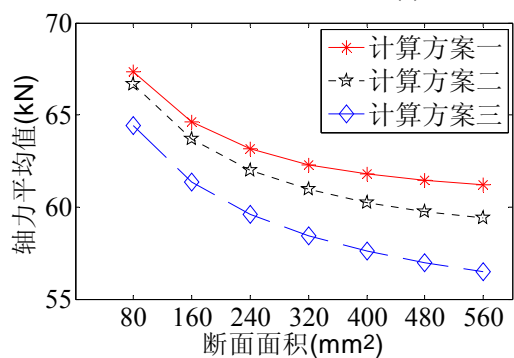
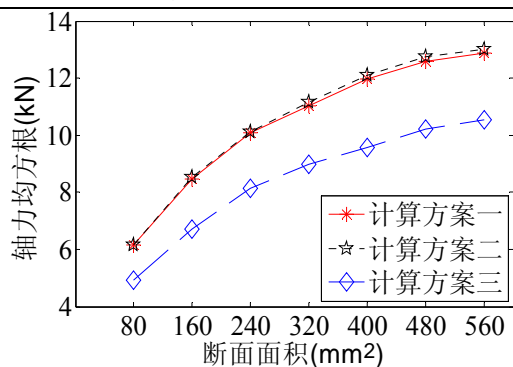


(c) 节点 111 位移统计值

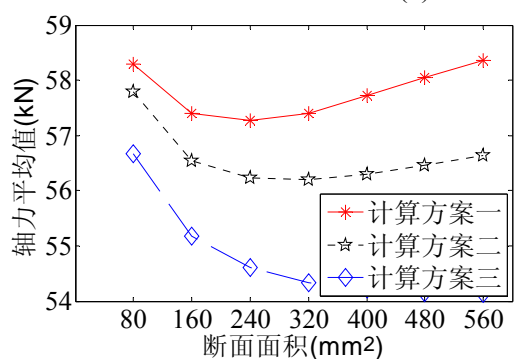
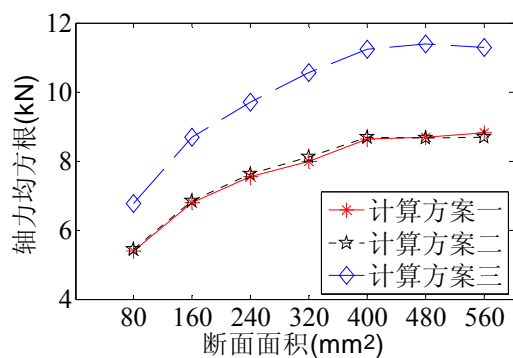
图 4.52 断面面积对节点位移统计值的影响



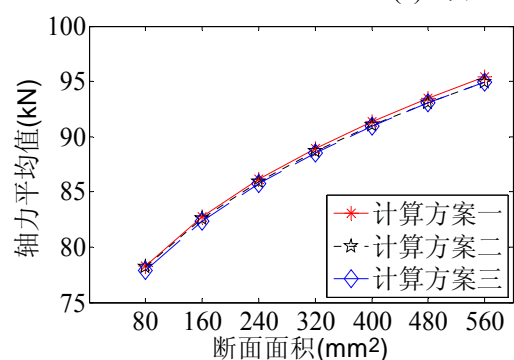
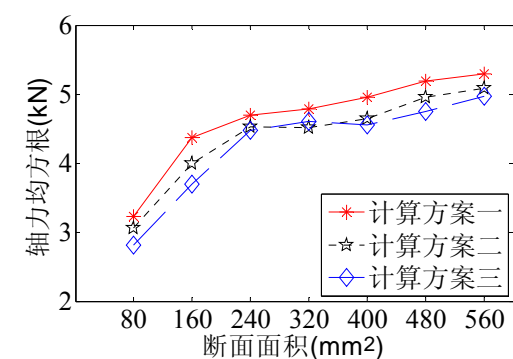
(a) 单元 267 轴力统计值



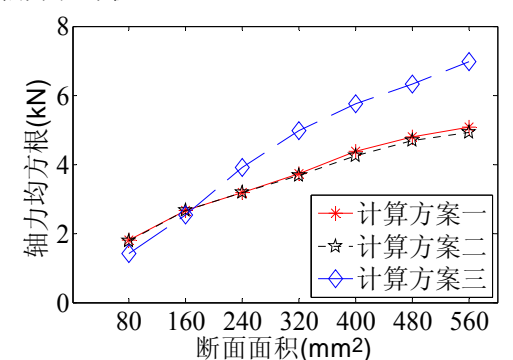
(b) 单元 59 轴力统计值



(c) 单元 203 轴力统计值



(d) 单元 2 轴力统计值





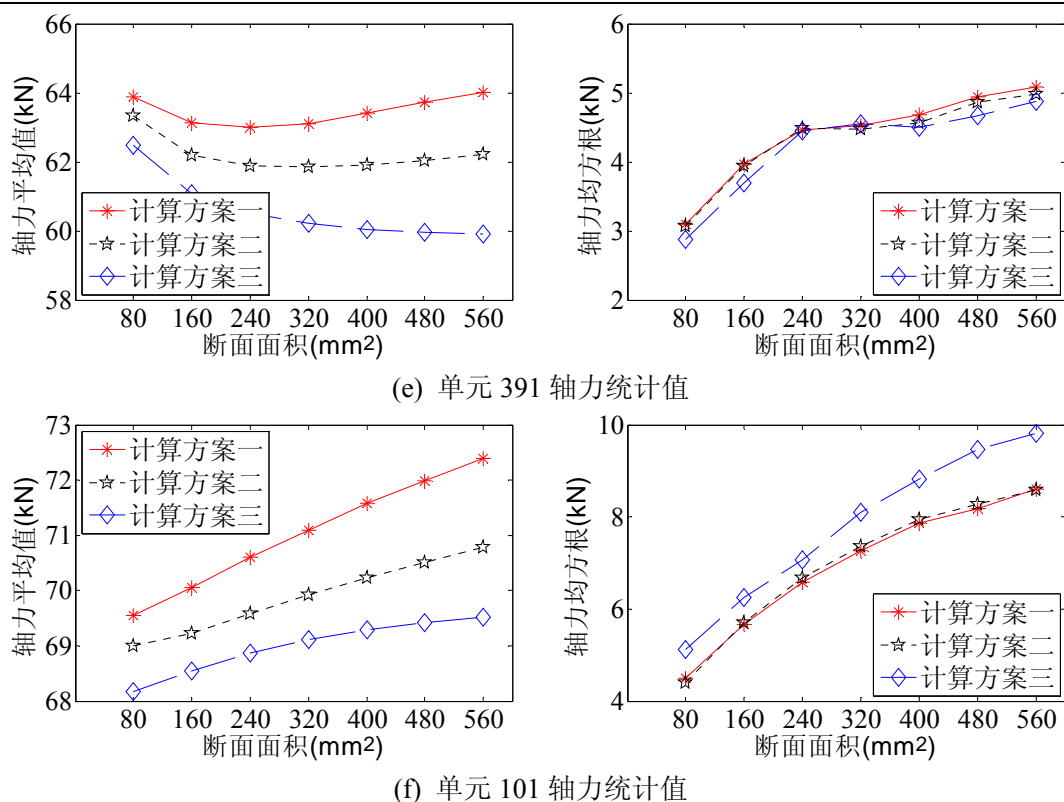
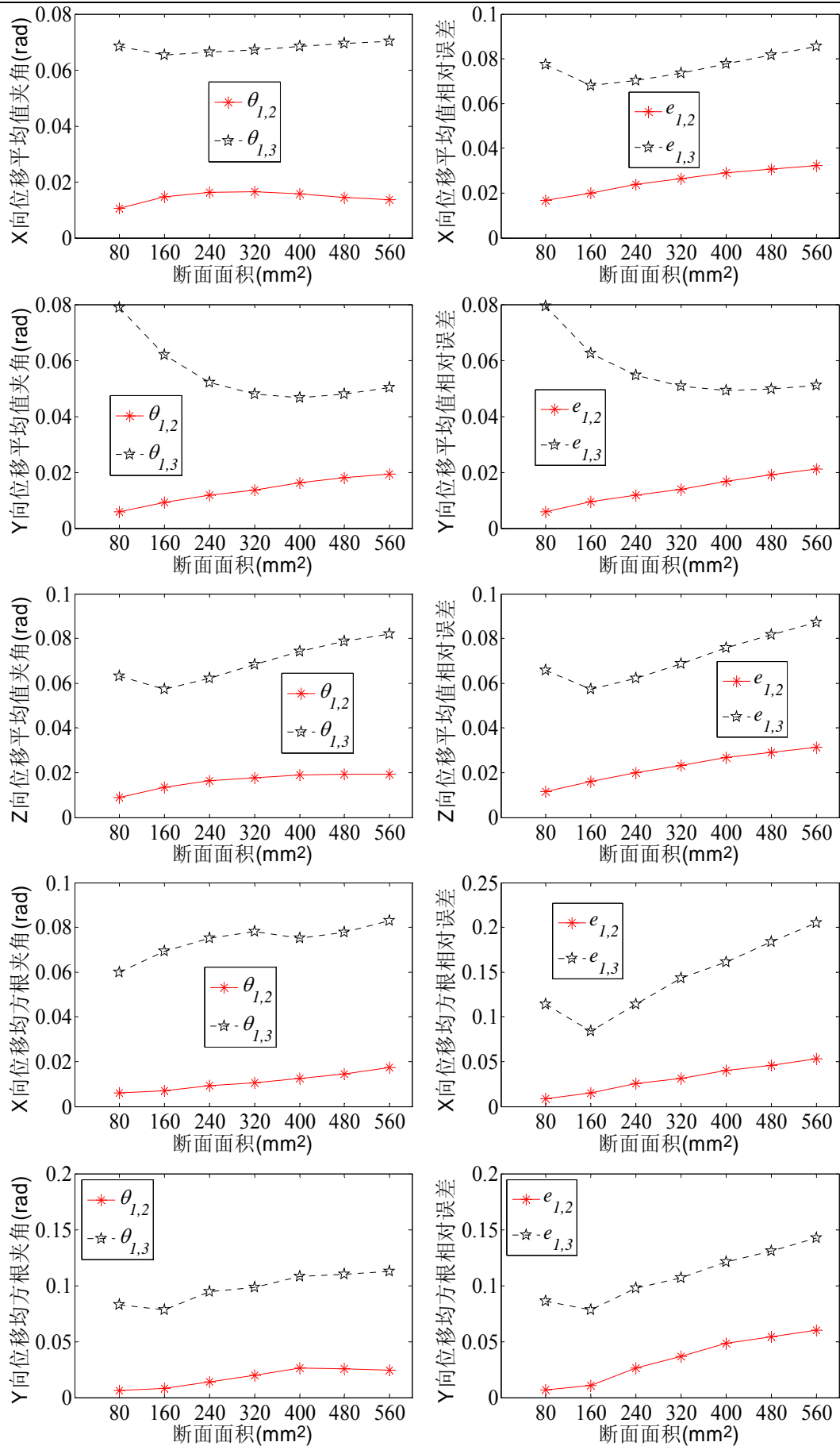


图 4.53 断面面积对单元轴力统计值的影响

由图 4.52 可知：①风荷载分布特性对节点位移平均值的影响特点同本章前文，在此不再进行详述；②断面面积越大，结构刚度越大，因而位移的统计值越小，断面面积还是对节点位移产生一定影响；③位移平均值和均方根在同一断面面积下也基本具有相同的量级；④对于统计值较大的主要位移，随着断面面积的逐步增加，位移统计值的增加或下降趋势均逐渐减弱，曲线斜率变化较小，几乎保持为一个定值，呈现出弱的非线性；⑤与预拉力相比，断面面积对节点位移的影响相对较小，文献[174]发现位移的均方根值与索的断面面积关系曲线几乎为一水平直线，作者认为通过调整索断面面积的大小来提高结构抗脉动风的能力是微不足道的。

由图4.53可知：①轴力随面积的变化没有一致性，虽然均方根是随着面积的增加而增加，但是并非所有的平均值随面积的增加而增加，这与初始预拉力对单元轴力统计值的影响是不一样的；②总的来说，当断面面积较小时，曲线斜率变化较为明显，非线性较为突出，而当断面面积较大时，曲线斜率变化较小，也呈现出弱的非线性；③当断面面积较大时，某些单元考虑一定峰值因子影响后的均方根和均值也具有相同的量级。

断面面积对响应统计值的整体误差的影响见图 4.54 和图 4.55。



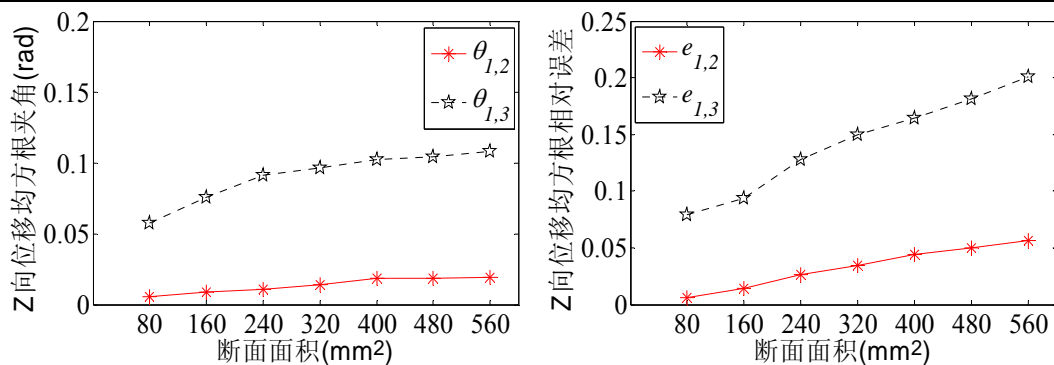


图 4.54 断面面积对节点位移统计值整体误差的影响

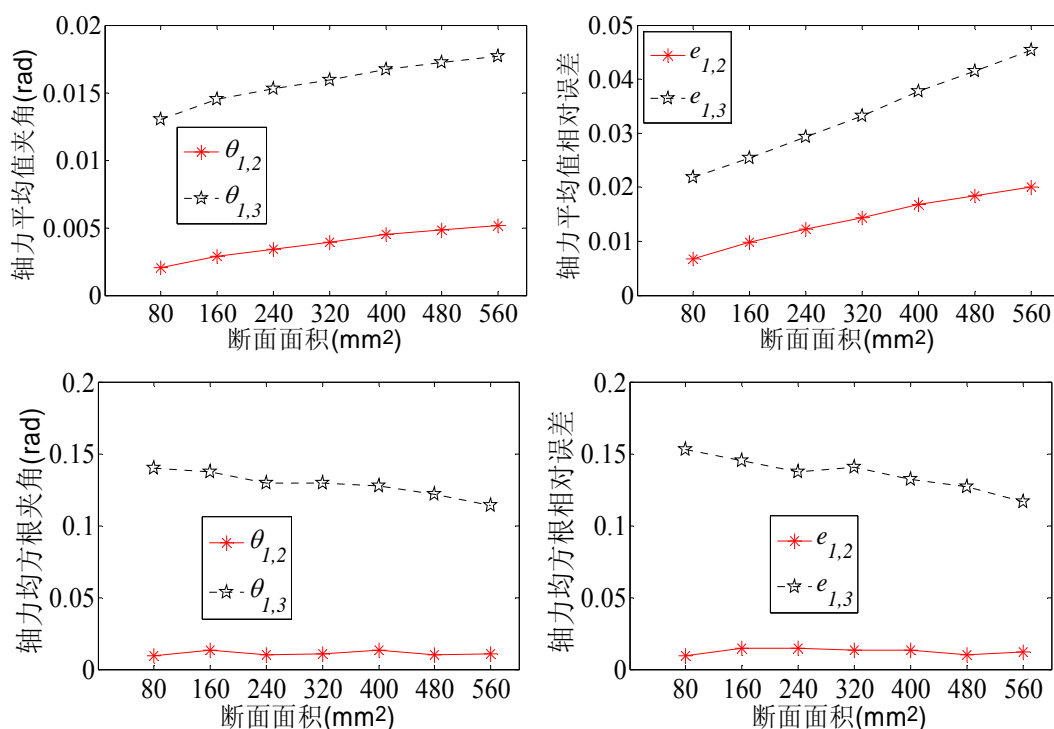
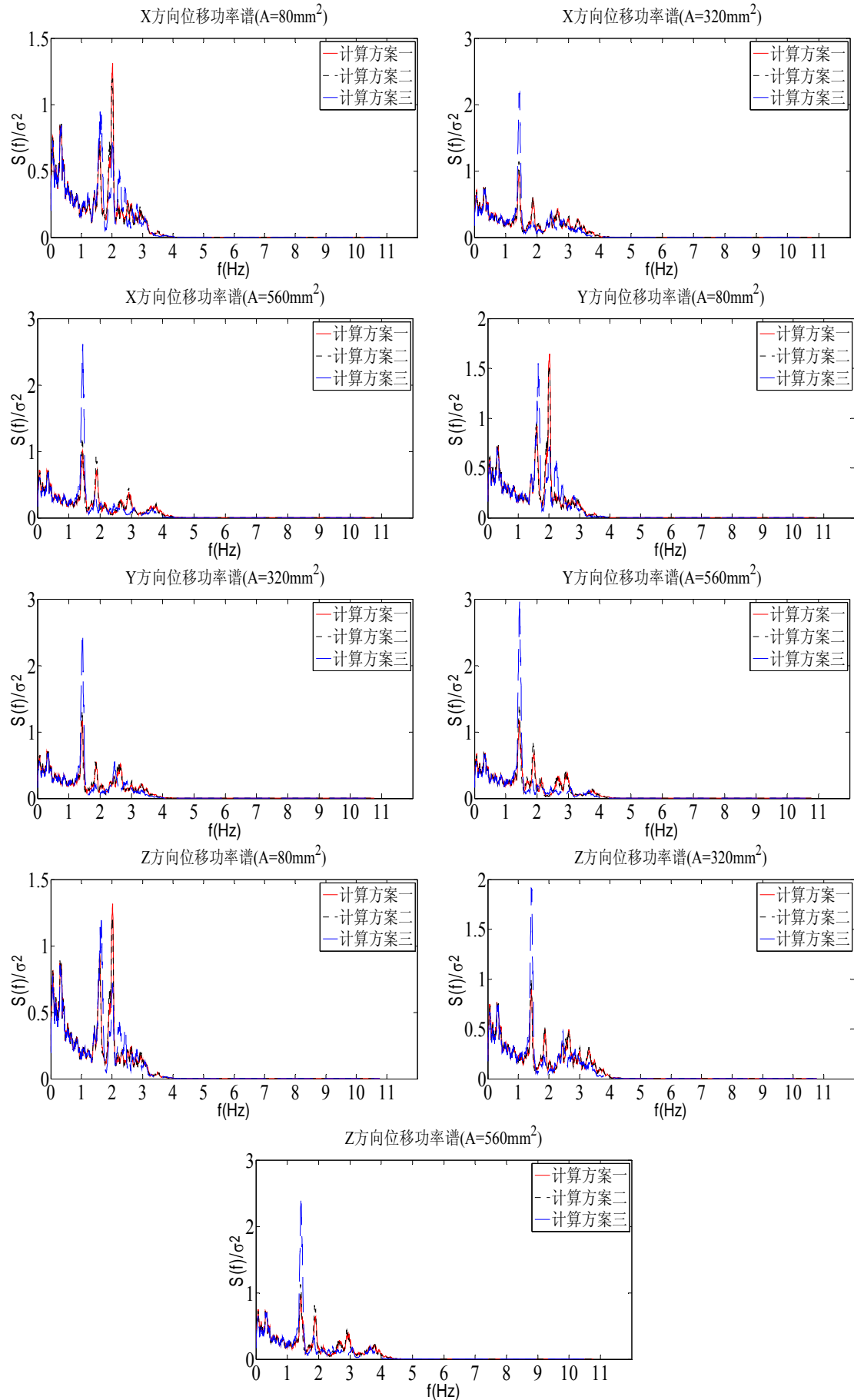


图 4.55 段面面积对单元轴力统计值整体误差的影响

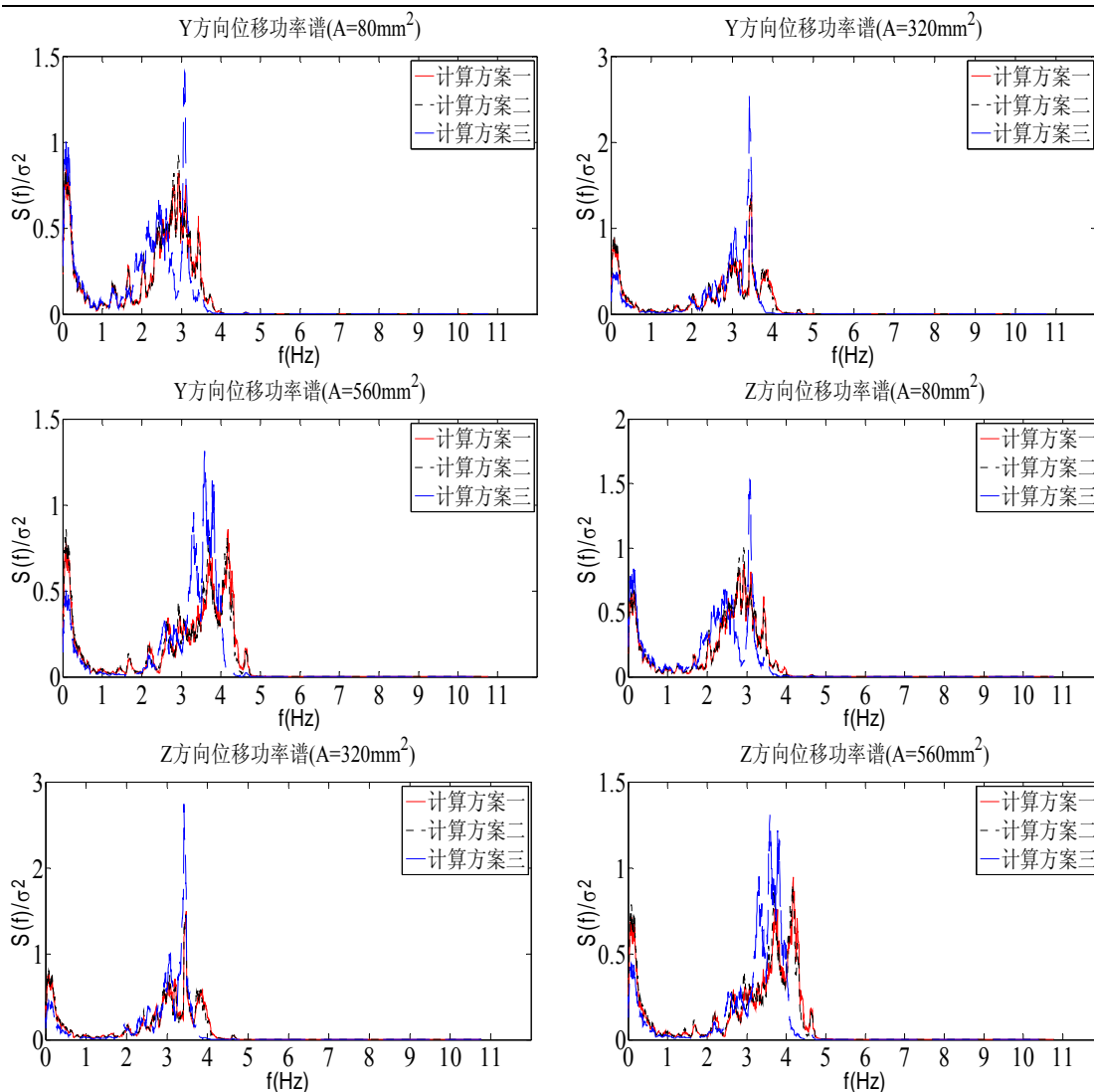
由图 4.54 和图 4.55 可知：①计算方案一、二之间的整体误差  $\theta_{1,2}$  和  $e_{1,2}$  依然小于计算方案一、三之间的整体误差  $\theta_{1,3}$  和  $e_{1,3}$ ；②整体误差受断面面积的影响较小，虽然断面面积成倍增加，但是整体误差变化不大，比较平稳，尤其是计算方案一、二之间的整体误差。

### 3) 断面面积对响应功率谱密度的影响

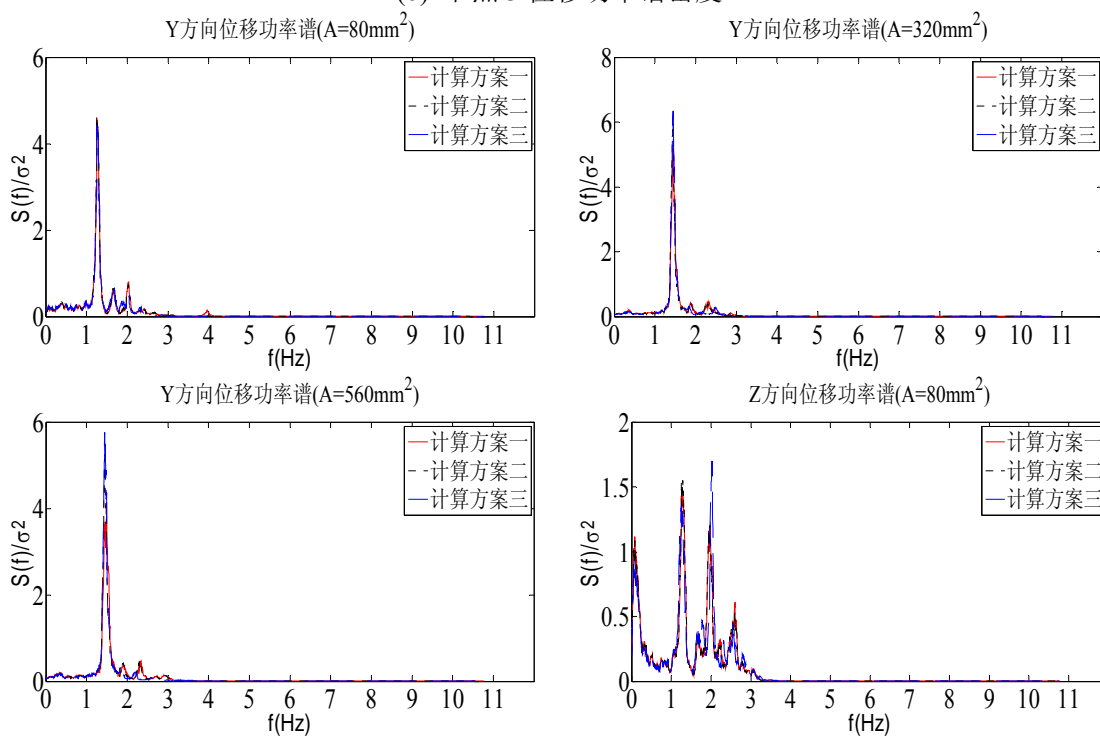
断面面积对节点位移和单元轴力响应功率谱密度的影响分别见图 4.56 和图 4.57。

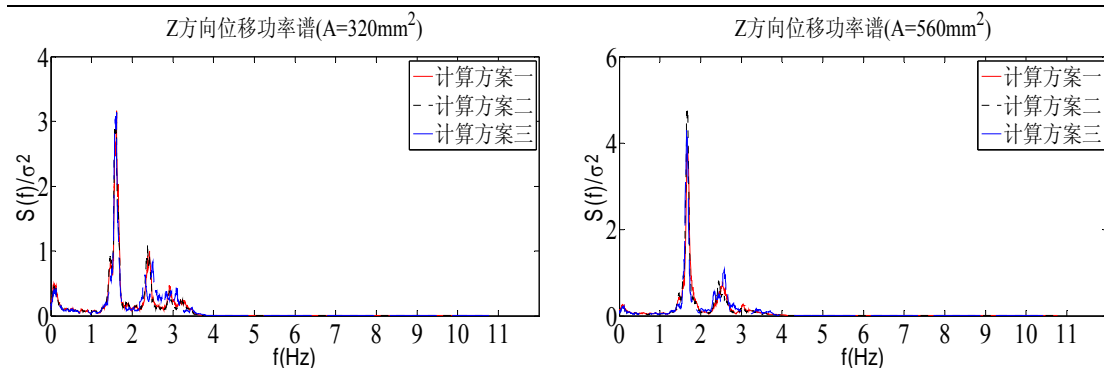


(a) 节点 67 位移功率谱密度



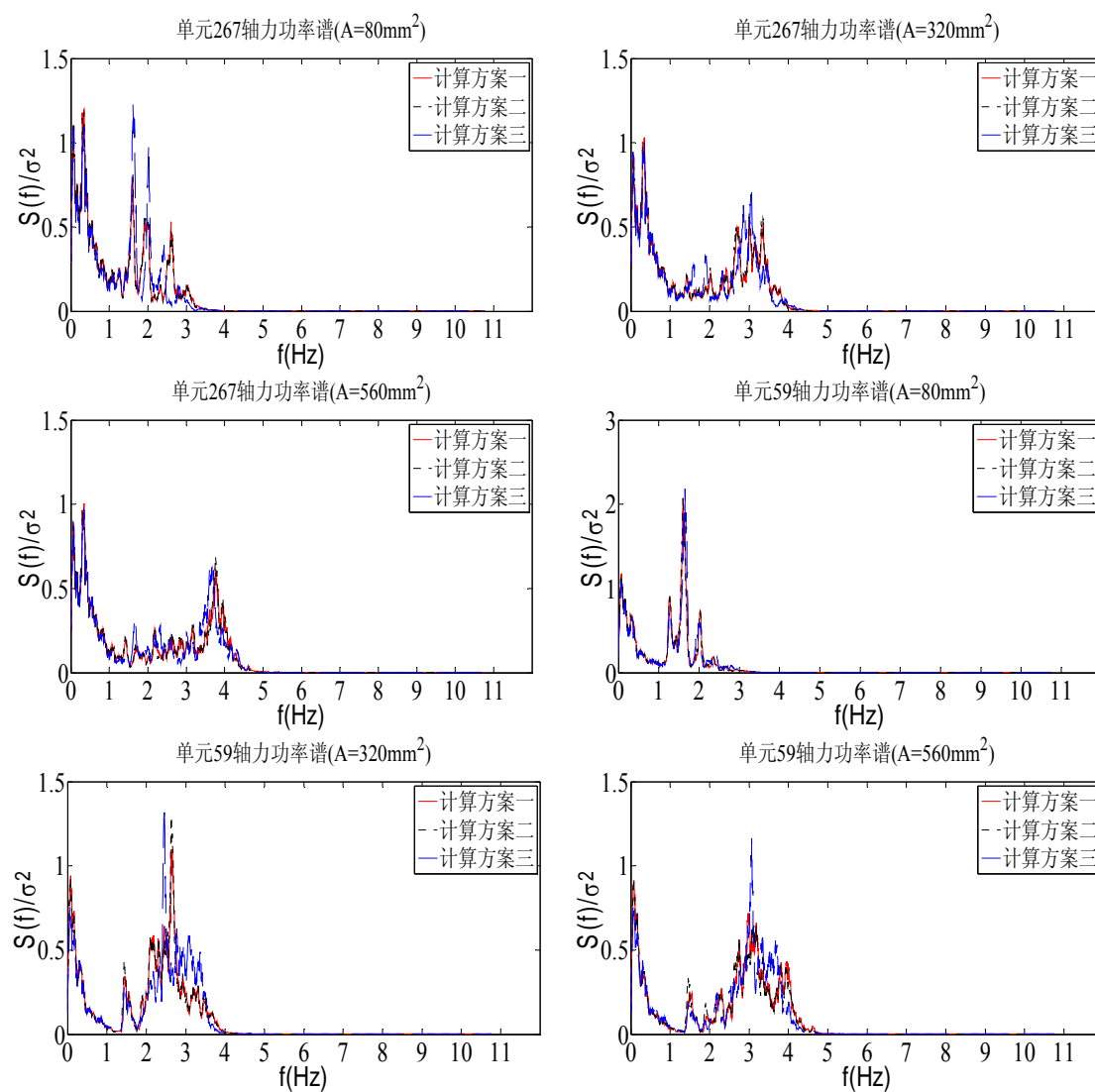
(b) 节点 3 位移功率谱密度

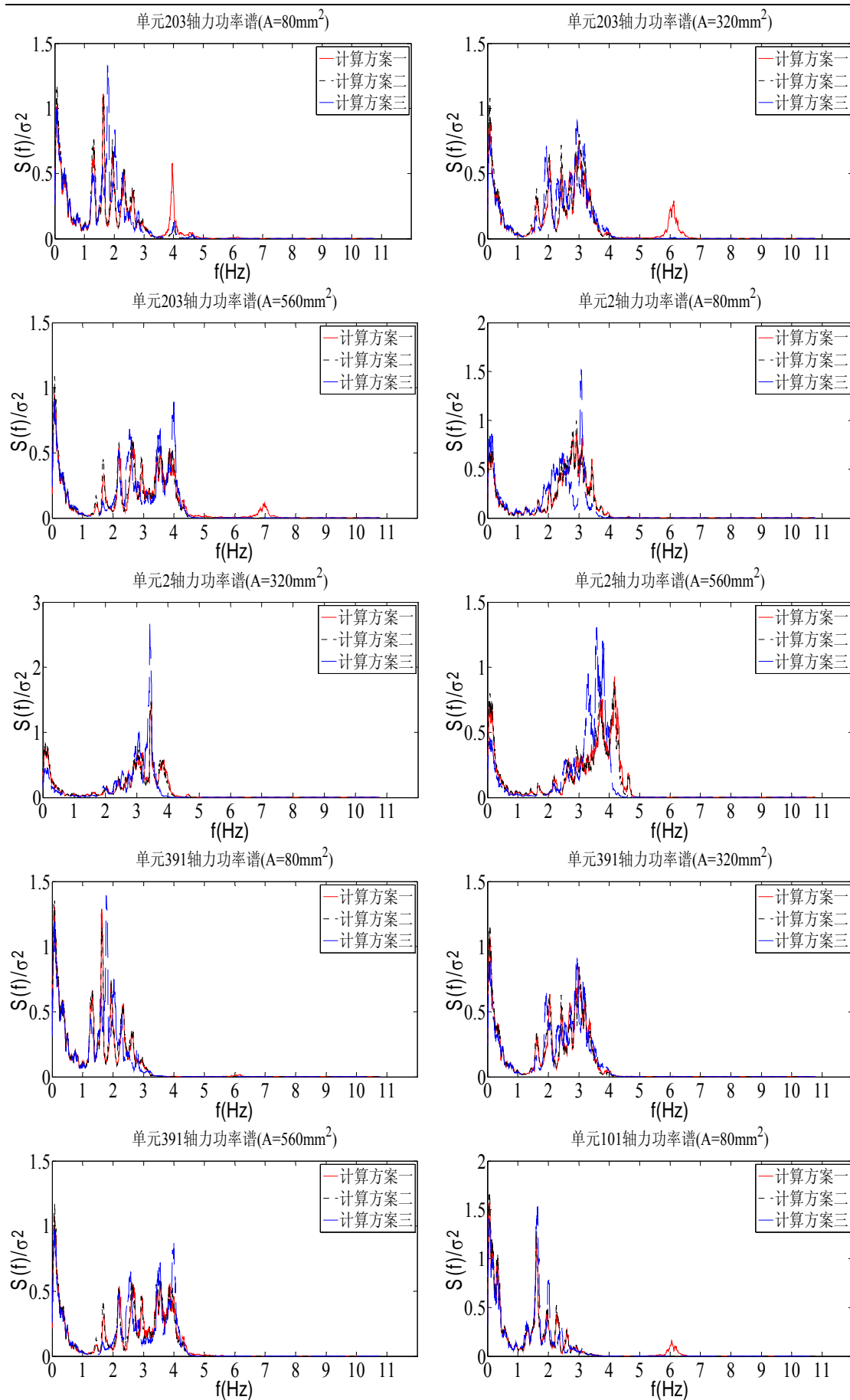




(c) 节点 111 位移功率谱密度

图 4.56 断面面积对节点位移功率谱密度的影响





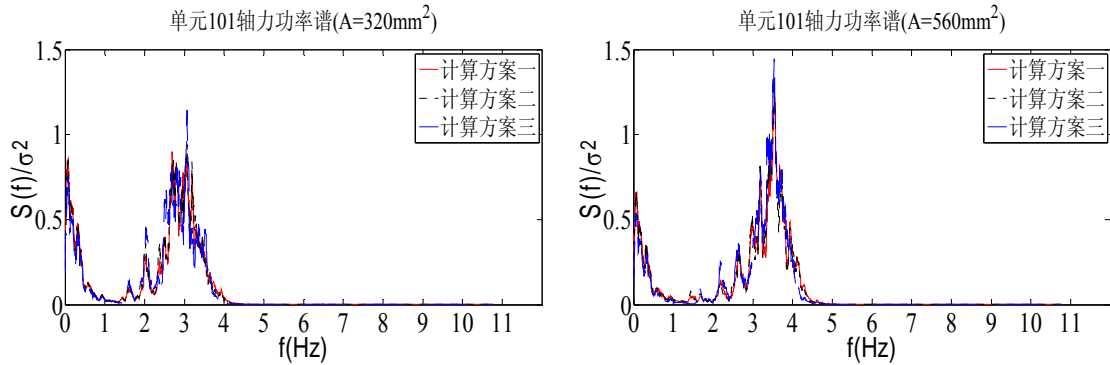
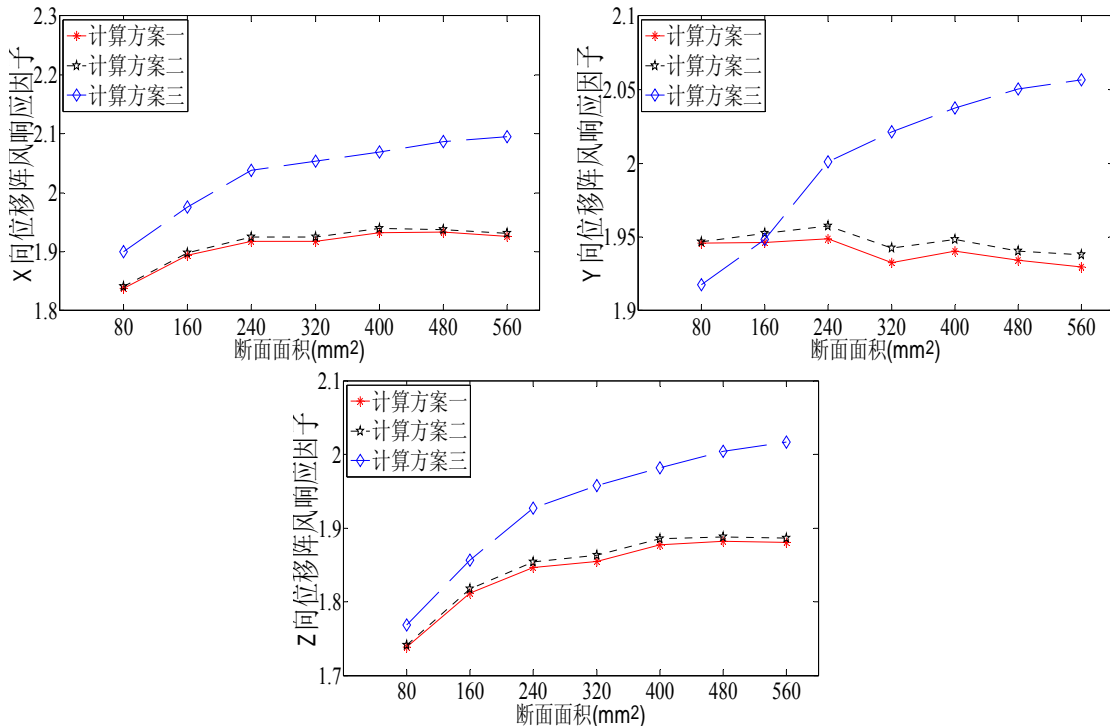


图 4.57 断面面积对单元轴力功率谱密度的影响

由图 4.56 和图 4.57 可知：①在所研究的节点和单元的响应功率谱密度中，背景分量和共振分量所占比例的特点依然同前文，不再赘述；②虽然断面面积成倍增加，但是节点 111 的共振频率却增长比较缓慢；③响应功率谱密度带宽较宽，而且断面面积越大，响应功率谱密度带宽频段也越大，结构的非线性振动依然是一个需要考虑多频率的宽带过程；④在同一断面面积下，不同响应的功率谱密度形状差异较大，结构的非线性响应依然比较复杂。

#### 4) 断面面积对阵风响应因子的影响

断面面积对阵风响应因子的影响见图 4.58 和图 4.59。



(a) 节点 67 的位移阵风响应因子



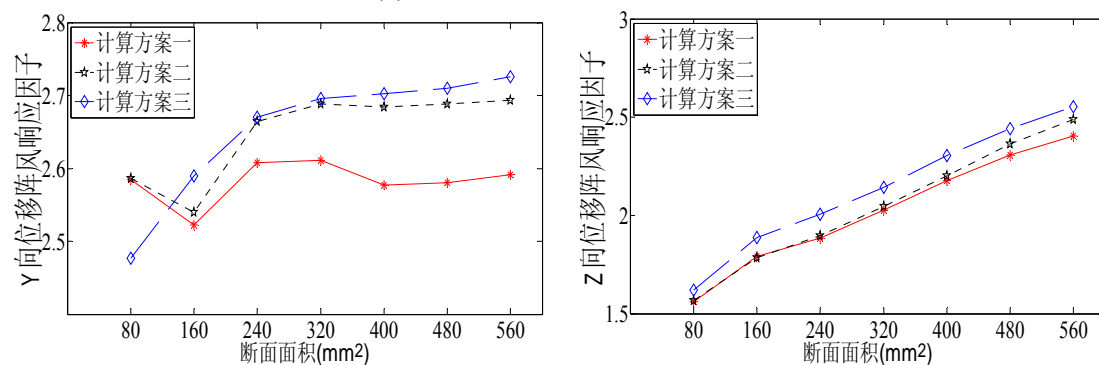
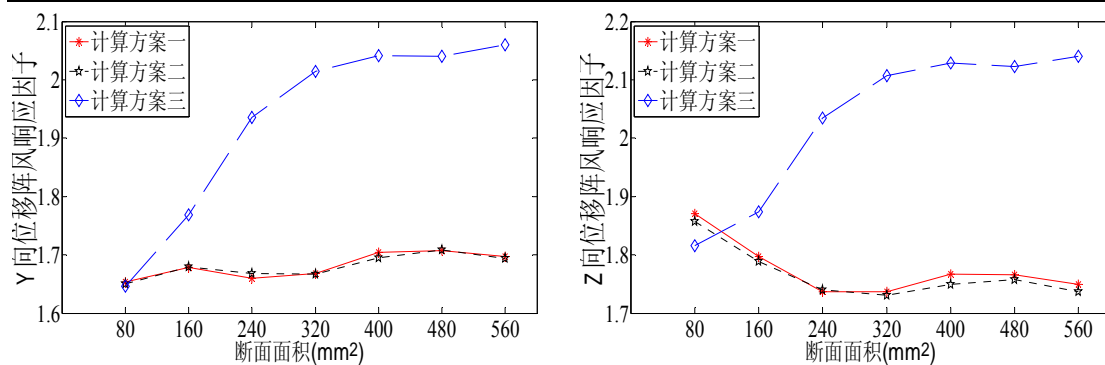
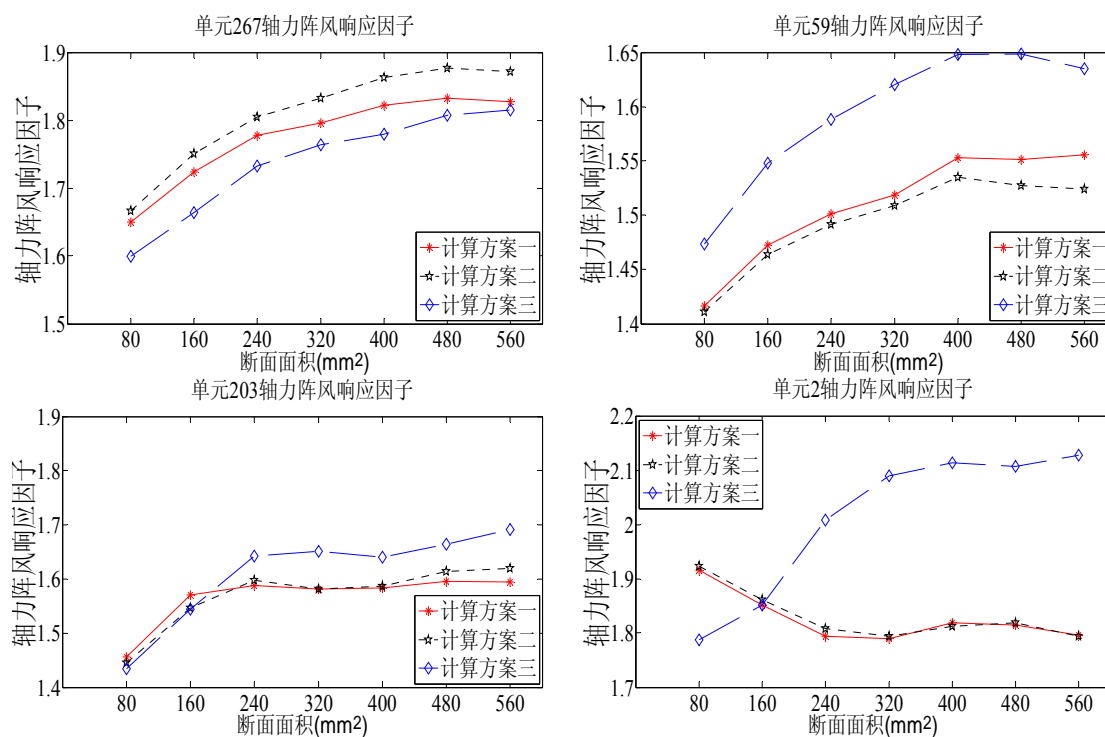


图 4.58 断面面积对节点位移阵风响应因子的影响



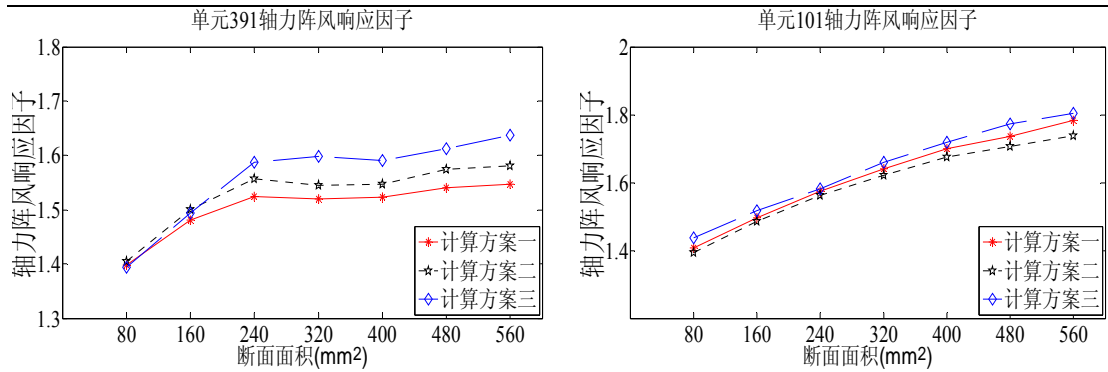


图 4.59 断面面积对单元轴力阵风响应因子的影响

由图 4.58 和图 4.59 可知：①阵风响应因子依然随着节点位置和单元位置的不同而不同，而且也随着断面面积的变化而变化，阵风响应因子依然通常不能取为一常量；②大体上说，断面面积较小时，阵风响应因子变化较大，当断面面积较大时，阵风响应因子变化较小，基本上趋近于一个定值。

### 5) 三种计算方案的对比分析

本章前文就断面面积对响应的影响进行了较为详细的阐述，本章在此对三种计算方案的结果进行对比分析，由图 4.52~图 4.59 不难得知：无论断面面积大小如何，计算方案一、二之间的差异总体较计算方案一、三之间的差异小，因此如果采用近似计算方案时，同样宜采用方案二考虑平均风荷载引起的非线性。

#### 4.3.3.3 分布荷载对自振频率、模态和响应的影响

在进行风致响应计算时，也需要考虑分布荷载  $FD$  单独变化时对自振频率、模态和响应的影响，本小节参数取值为：断面面积为  $A = 355.98\text{mm}^2$ ，初始预拉力为  $T_0 = 70\text{kN}$ ，分布荷载  $FD = 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700\text{N/m}^2$ ，风荷载依然采用本章前文的结果。

#### 1、分布荷载对自振频率的影响

在计算方案一、二和三中，分布荷载对时程计算时初始位形的自振频率的影响分别见图 4.60、图 4.61 和图 4.62。

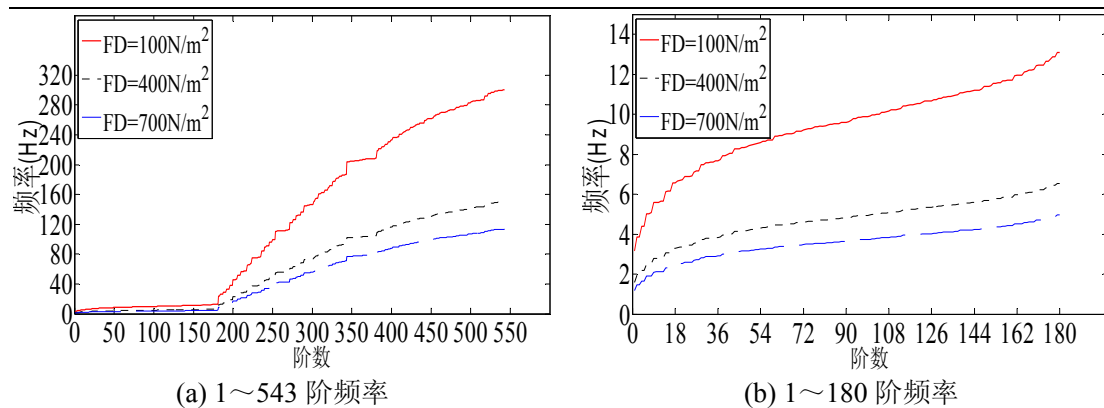


图 4.60 计算方案一中分布荷载对自振频率的影响

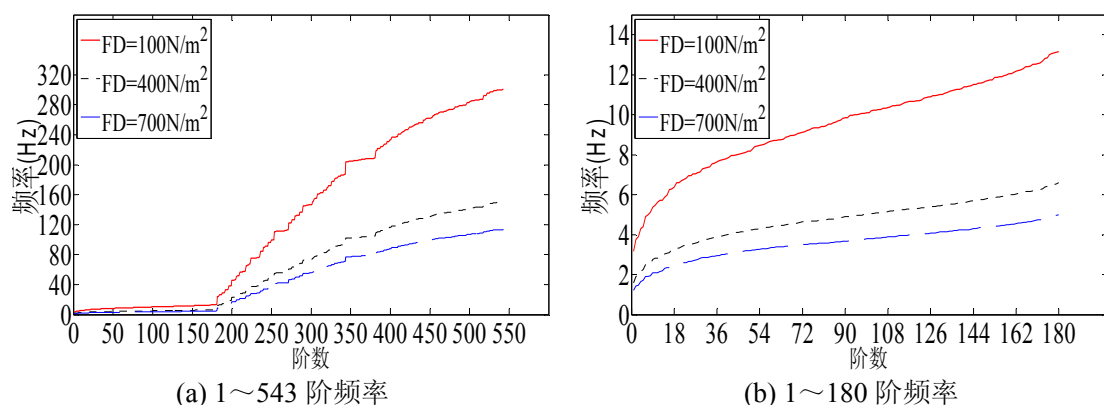


图 4.61 计算方案二中分布荷载对自振频率的影响

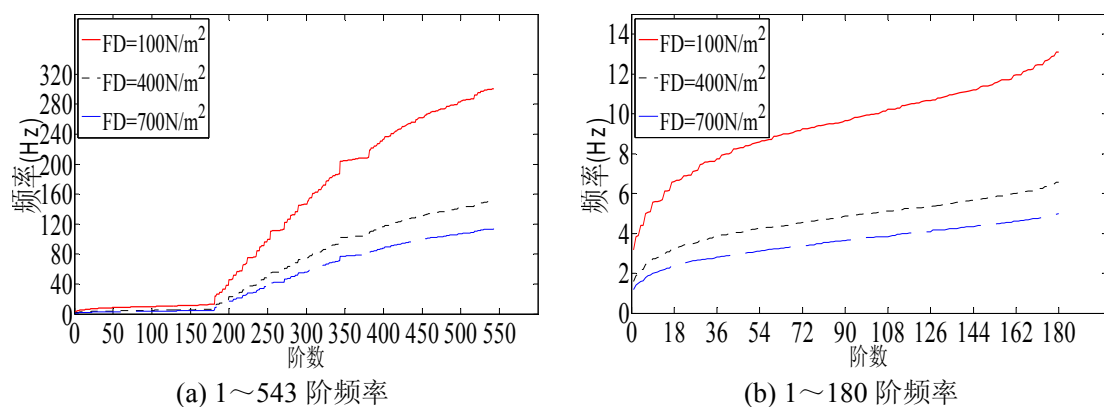


图 4.62 计算方案三中分布荷载对自振频率的影响

由图 4.60~图 4.62 可知：①同阶自振频率随着分布荷载的增加而减小，分布荷载对结构高频的影响较大，而对低频的影响较小；②结构低频段的频率比较密集，呈连续分布，因此在对结构进行动力时程分析时，同样需要考虑多个低频频率对 Rayleigh 阻尼矩阵的影响。结构频率同样大致在第 181 阶后产生较为明显的增长。

在此同样需要指出的是，本小节在用式(3.75)计算  $a_0$  和  $a_1$  时，依然考虑了结构前 180 阶频率的影响， $\omega_i$  和  $\omega_j$  的取法同本章前文。

在相同分布荷载情况下、不同计算方案之间的 1~180 阶频率之间的差异见图 4.63。

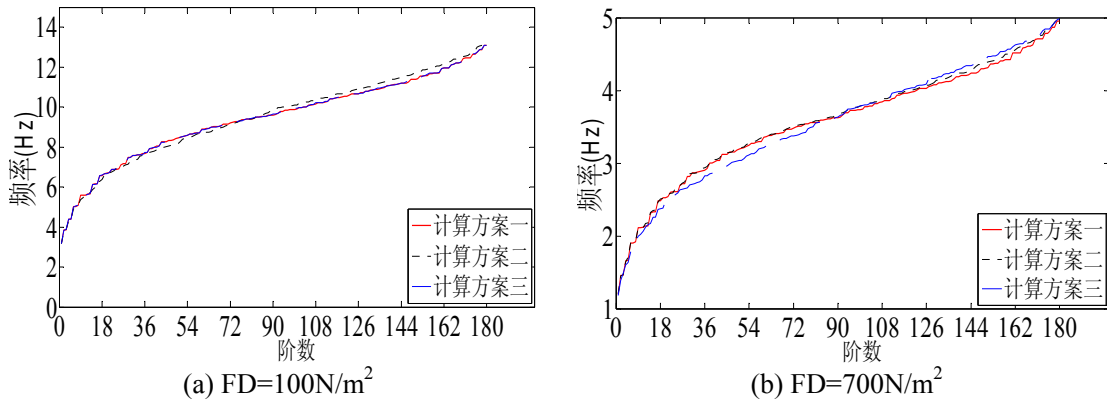
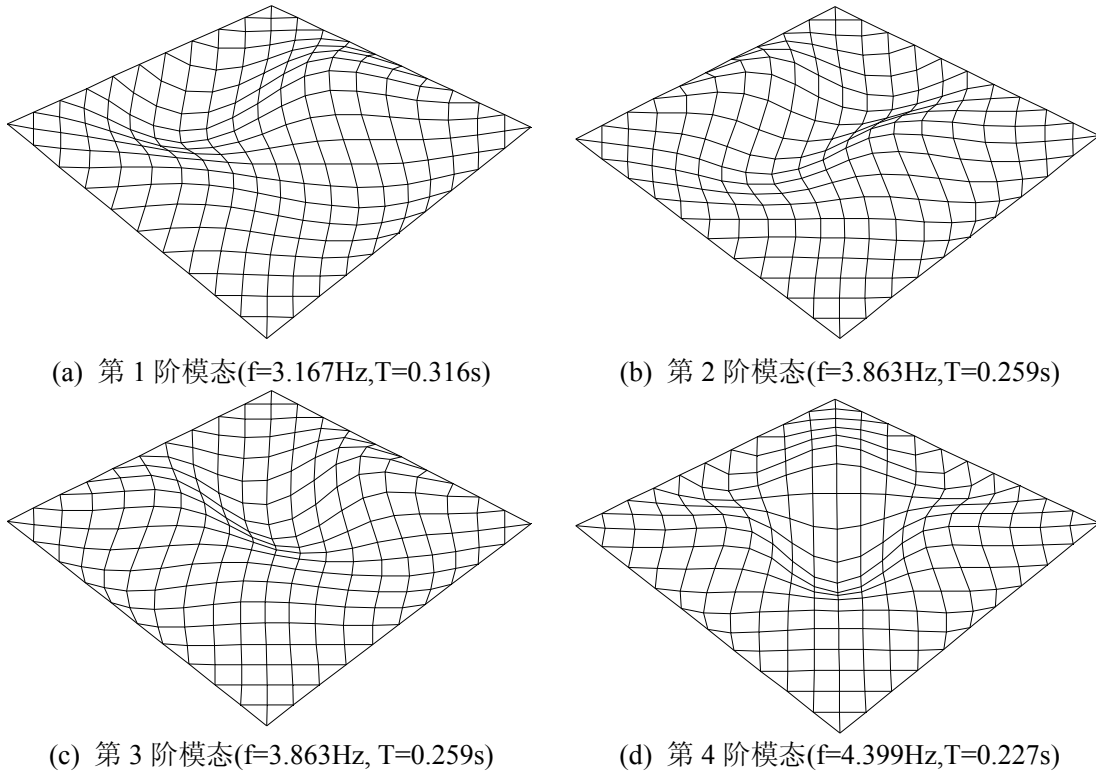


图 4.63 相同分布荷载情况下、不同计算方案之间的低频段之间的差异

由图 4.63 可知，当分布荷载较小时，低频段的频率在三种计算方案之间的差异较小，当分布荷载较大时，差异则较大。

## 2、分布荷载对结构模态的影响

在计算方案一、二和三中，分布荷载对时程计算时初始位形的结构模态的影响分别见图 4.64~图 4.66、图 4.67~图 4.69 和图 4.70~图 4.72。



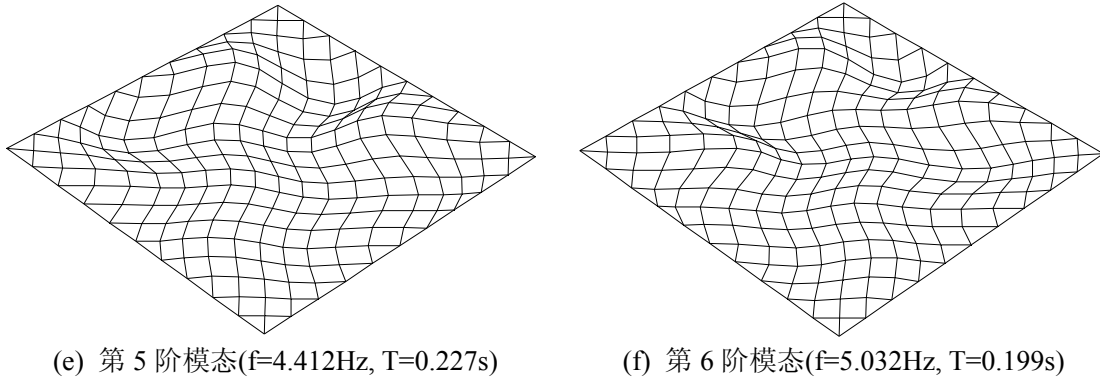


图 4.64 计算方案一中分布荷载  $FD=100\text{N/m}^2$  时的部分结构模态

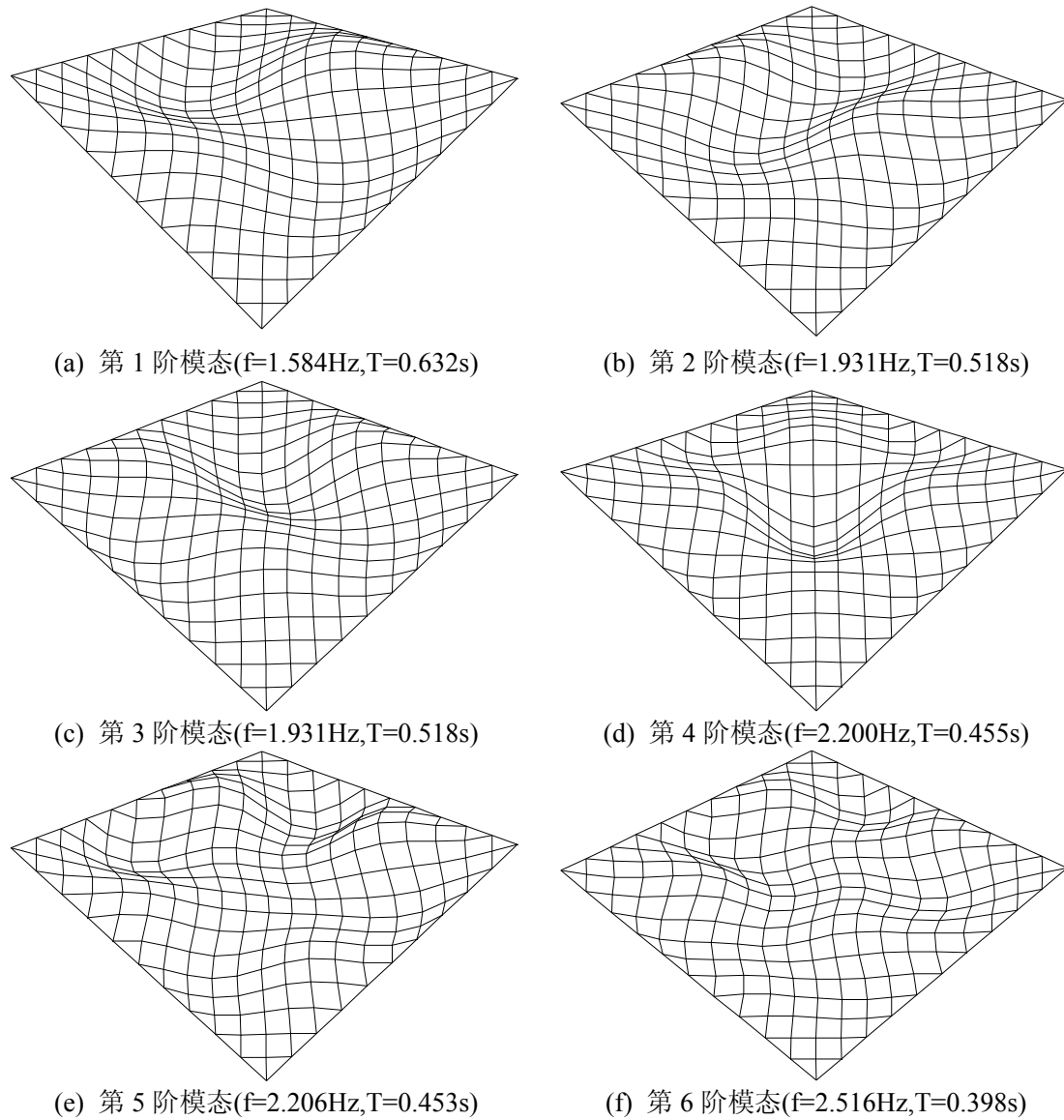


图 4.65 计算方案一中分布荷载  $FD=400\text{N/m}^2$  时的部分结构模态

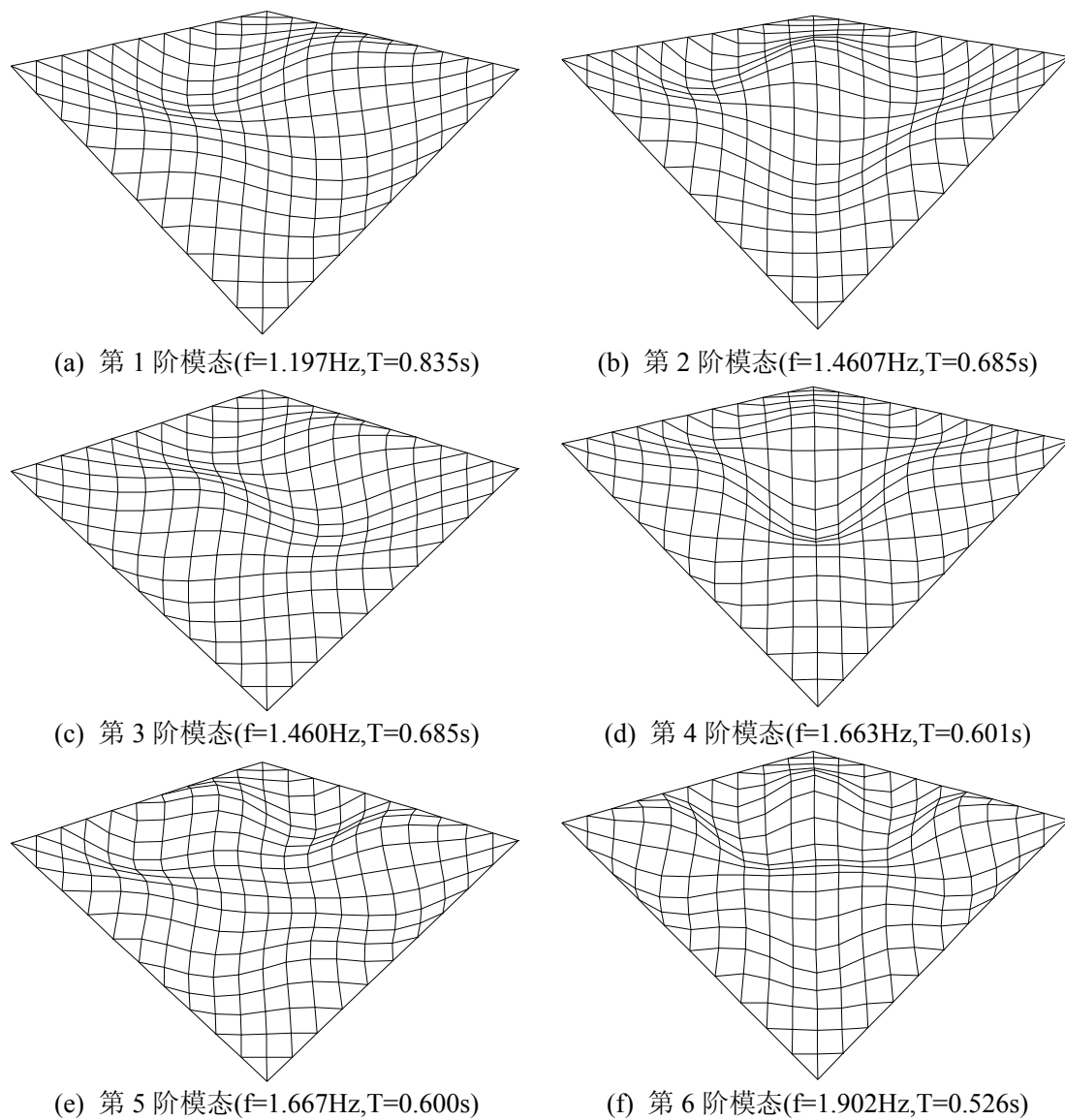
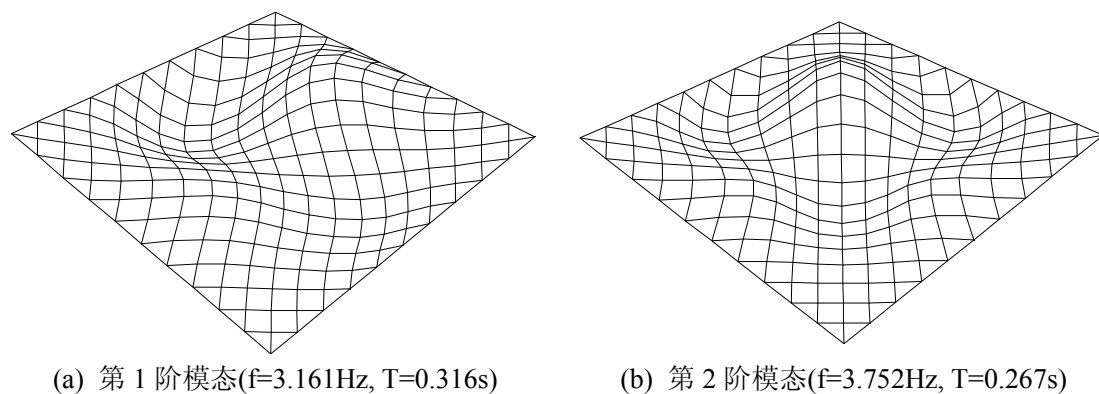


图 4.66 计算方案一中分布荷载  $FD=700\text{N/m}^2$  时的部分结构模态



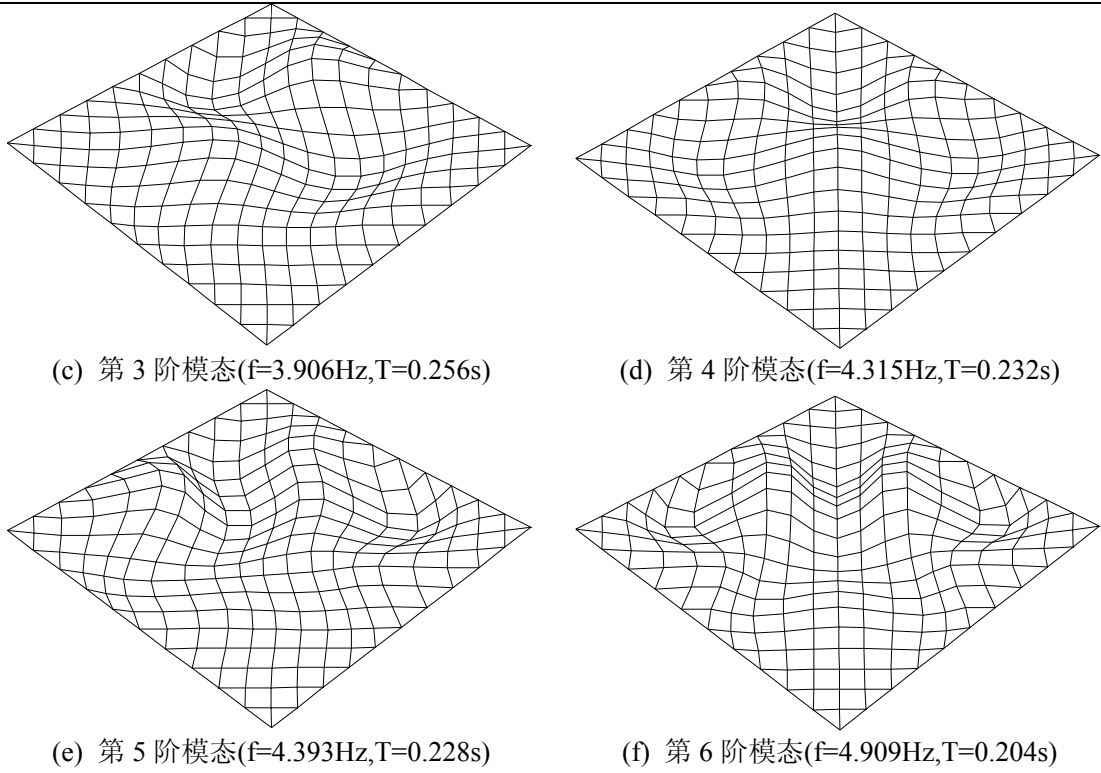
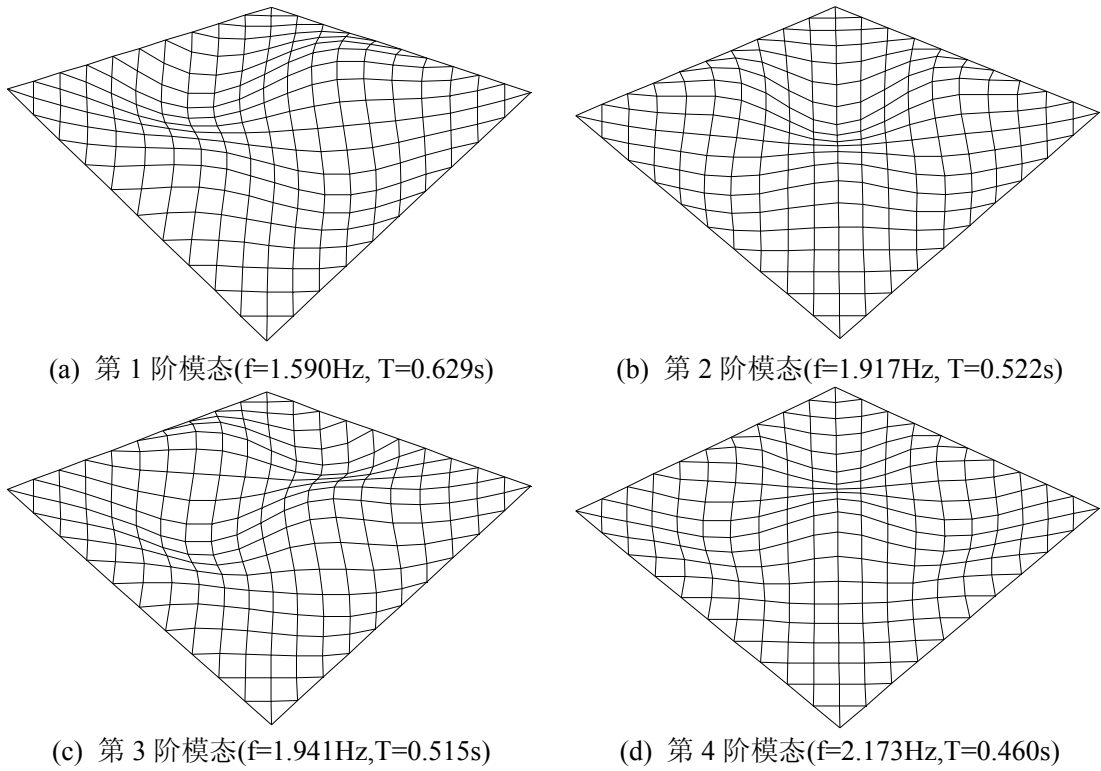


图 4.67 计算方案二中分布荷载  $FD=100\text{N/m}^2$  时的部分结构模态



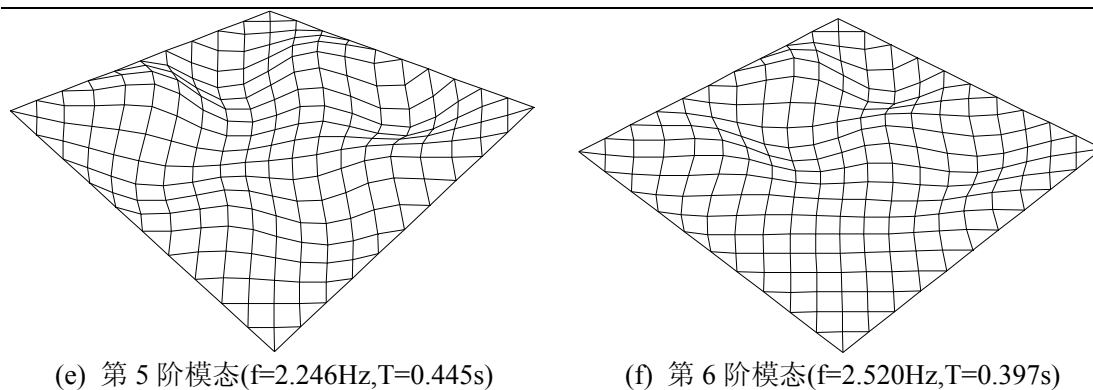


图 4.68 计算方案二中分布荷载  $FD=400\text{N/m}^2$  时的部分结构模态

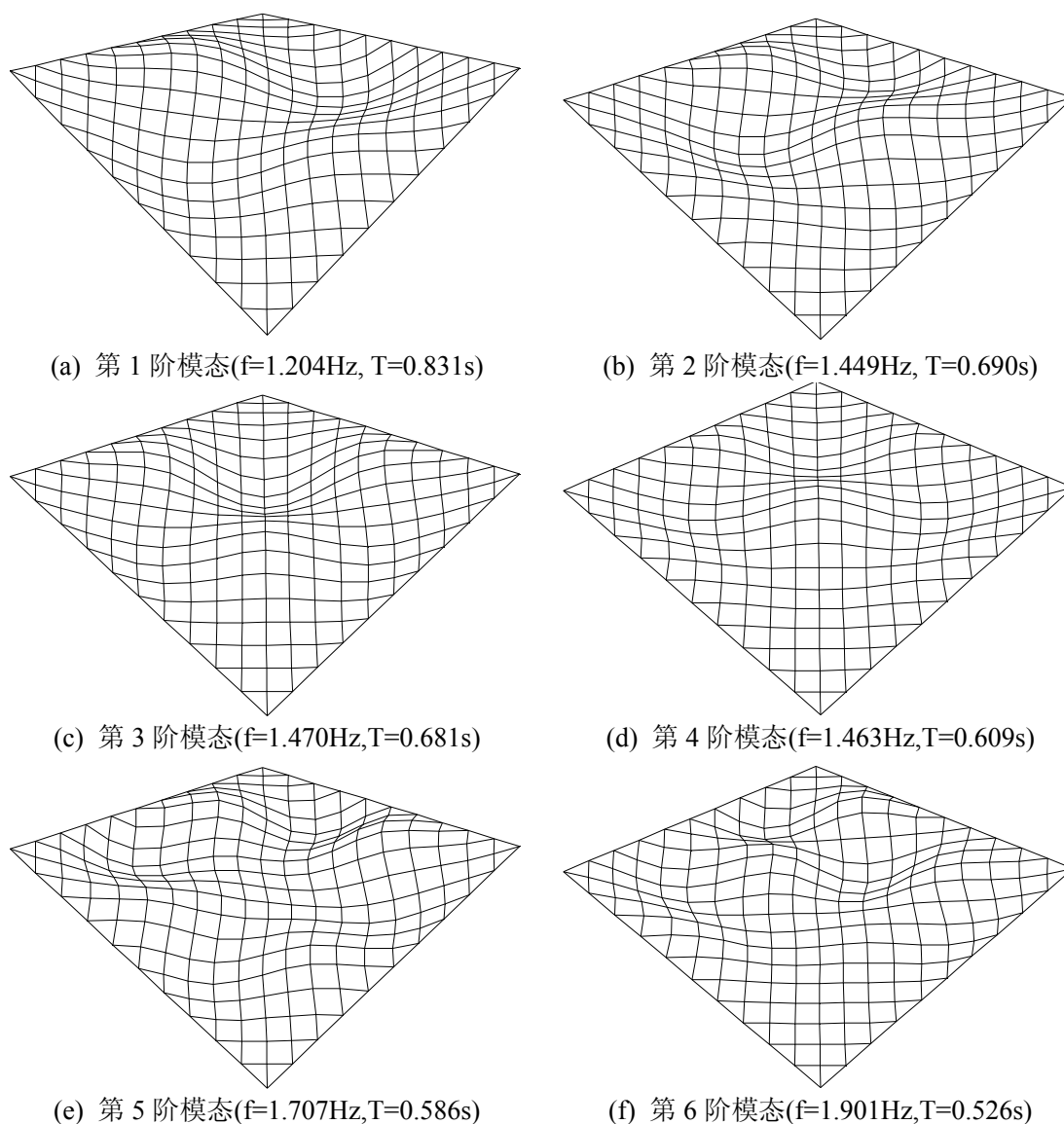


图 4.69 计算方案二中分布荷载  $FD=700\text{N/m}^2$  时的部分结构模态



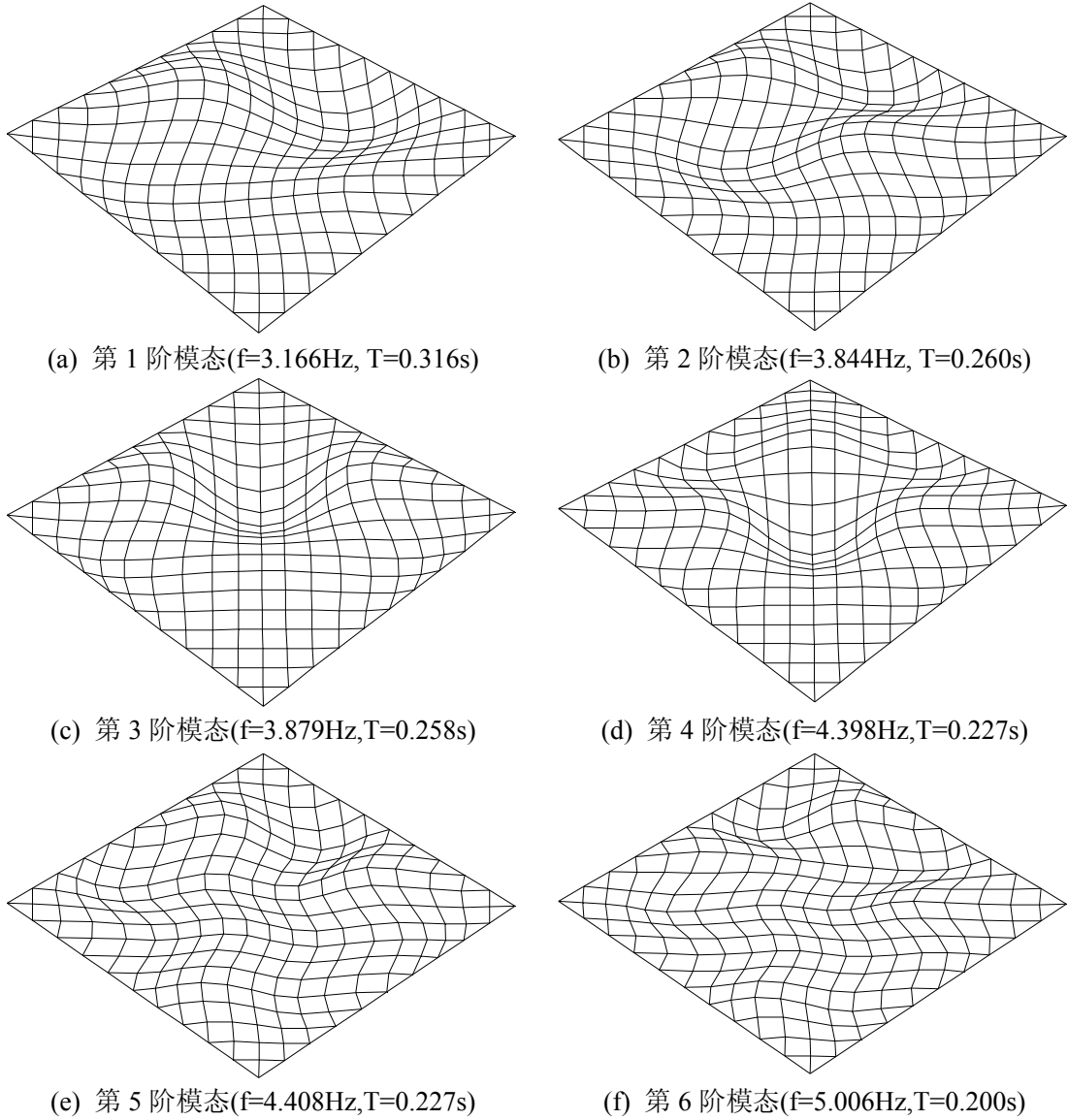
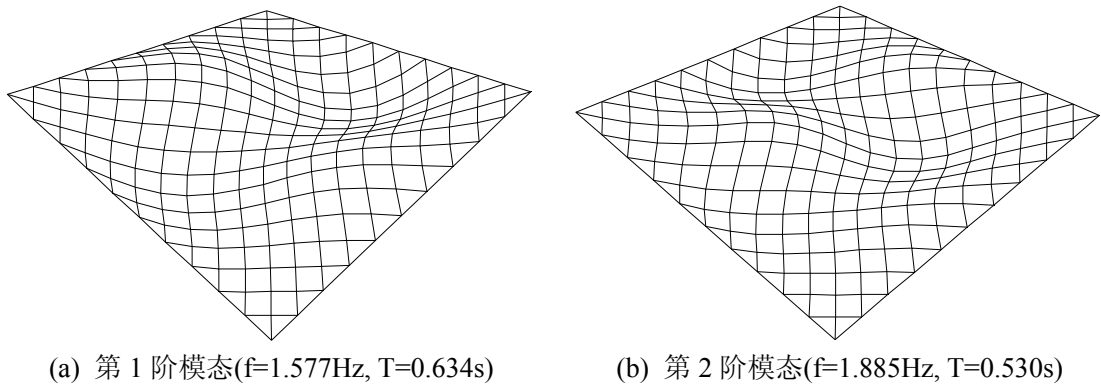


图 4.70 计算方案三中分布荷载  $FD=100\text{N/m}^2$  时的部分结构模态



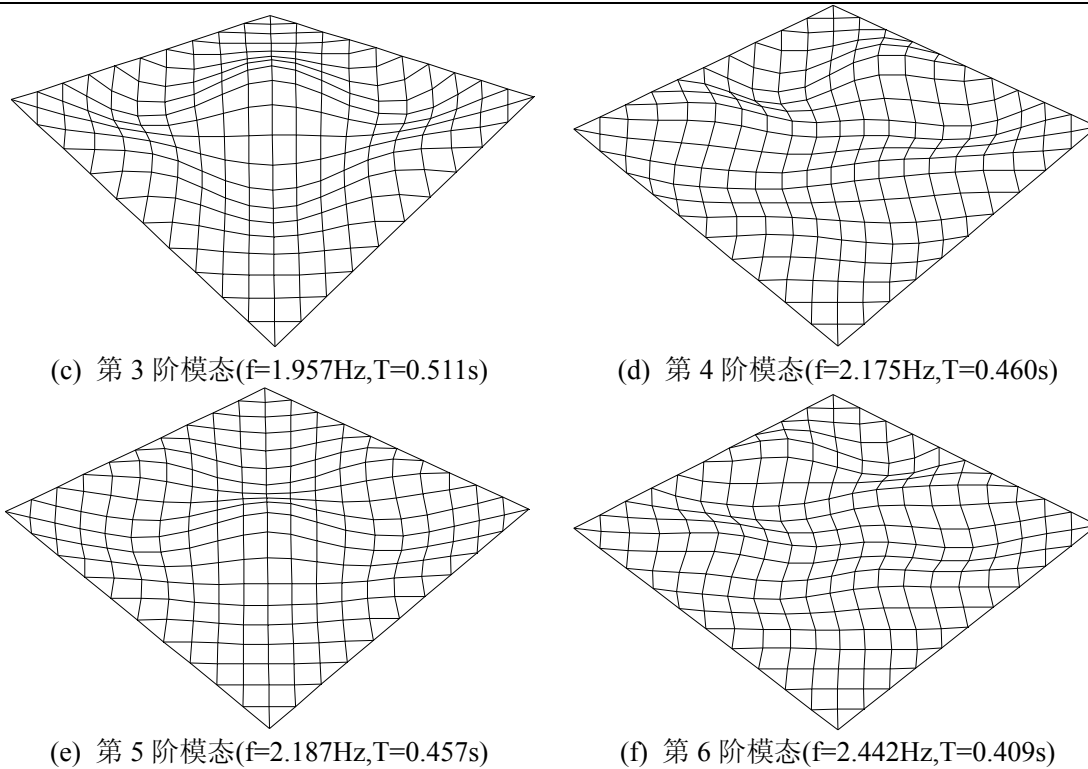
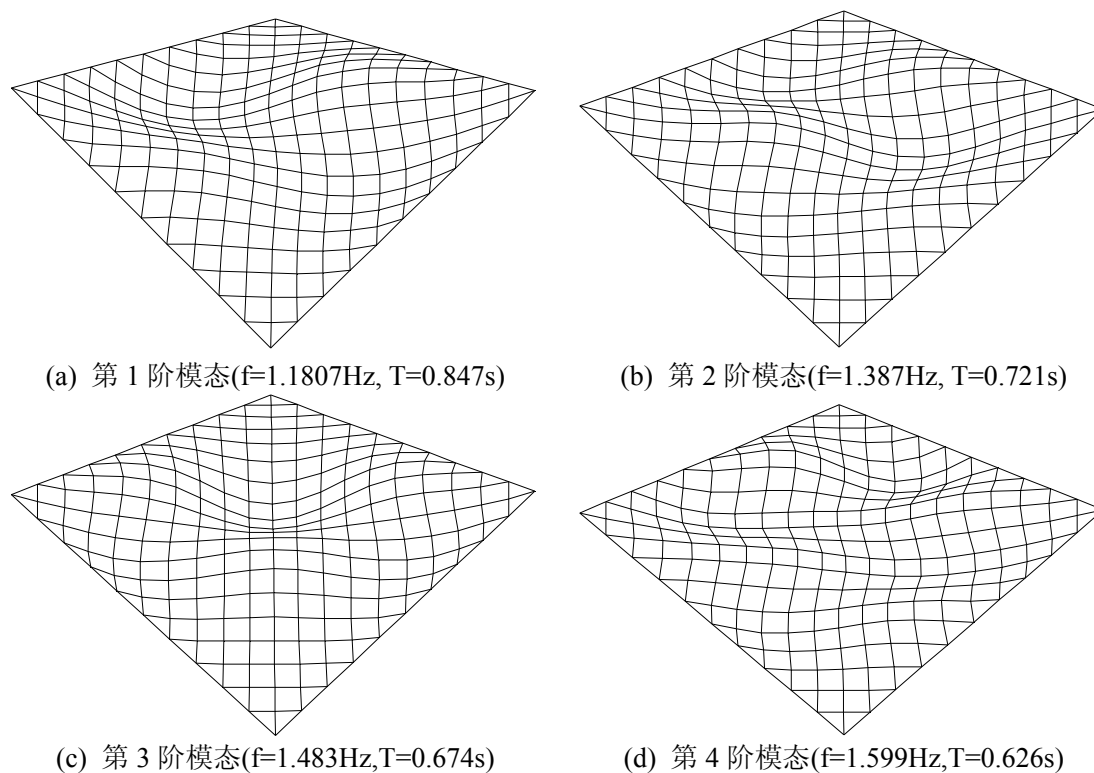
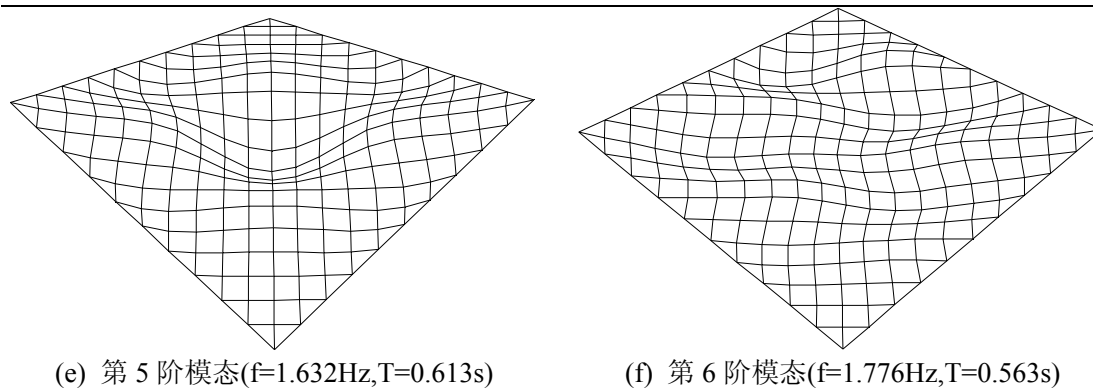


图 4.71 计算方案三中分布荷载  $FD=400\text{N/m}^2$  时的部分结构模态



(e) 第5阶模态( $f=1.632\text{Hz}$ ,  $T=0.613\text{s}$ )(f) 第6阶模态( $f=1.776\text{Hz}$ ,  $T=0.563\text{s}$ )图 4.72 计算方案三中分布荷载  $FD=700\text{N/m}^2$  时的部分结构模态

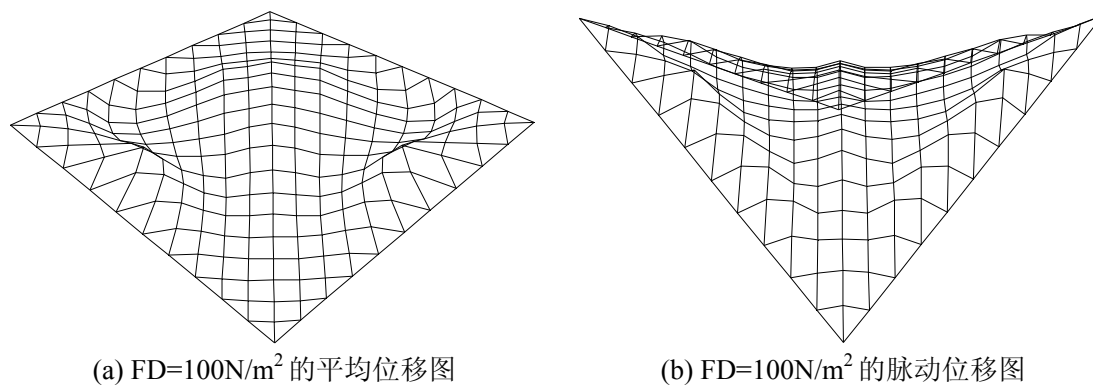
由图 4.64~图 4.72 可知：①多数情况下，结构前若干阶模态仍然为单轴或双轴反对称形式，结构的第 1 阶模态依然为双轴反对称形式；②各阶模态在两个方向上依然均为多波曲线，整个曲面变化复杂，阶数越高，模态形状越复杂；③在计算方案一中，当分布荷载较小时，分布荷载对同阶模态形状的影响不大，而当分布荷载较大时，部分同阶模态的形状相似而部分同阶模态的形状存在一定的差异。在计算方案二、三中，不同的分布荷载使得同阶模态的形状存在一定的差异；④同一分布荷载下不同计算方案的同阶模态形状有些相似，有些相差较大。

### 3、分布荷载对响应的影响

本小节将分析分布荷载  $FD$  对响应统计值、响应功率谱密度和阵风响应因子的影响，对比分析三种计算方案的差异。

#### 1) 分布荷载对结构变形的影响

三种计算方案中不同分布荷载情况下结构的变形见图 4.73~图 4.75。

(a)  $FD=100\text{N/m}^2$  的平均位移图(b)  $FD=100\text{N/m}^2$  的脉动位移图

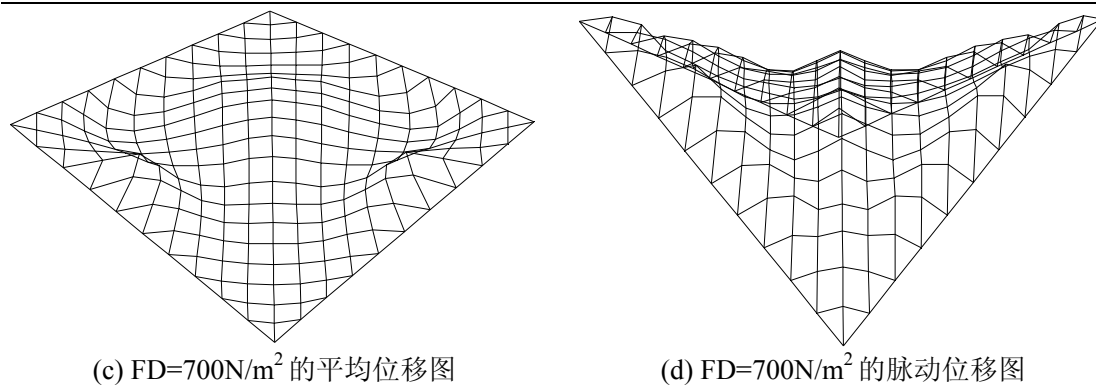


图 4.73 计算方案一中分布荷载对结构变形的影响

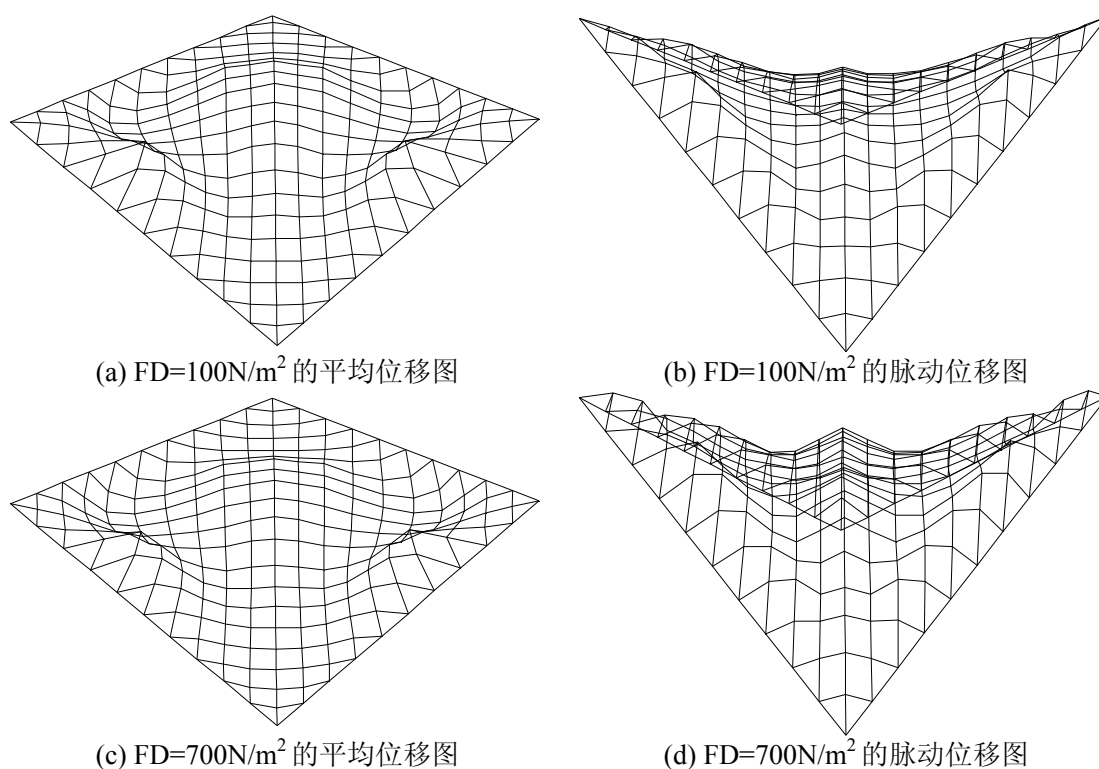
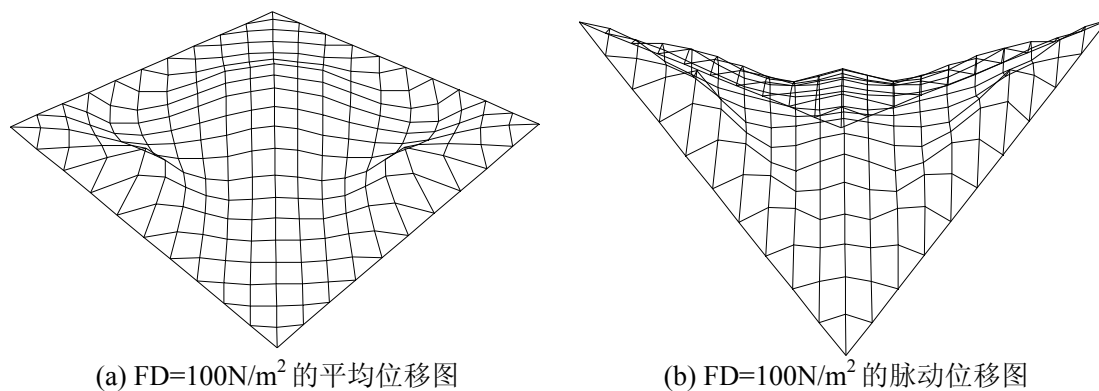
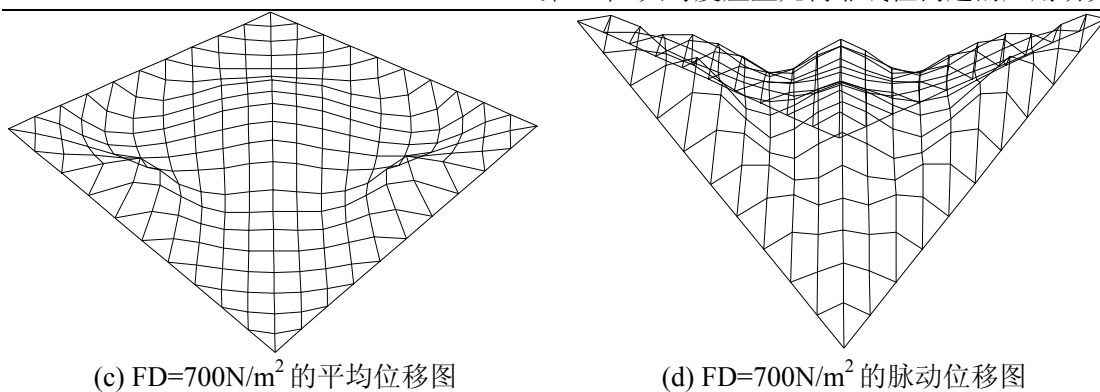


图 4.74 计算方案二中分布荷载对结构变形的影响





(c)  $FD=700N/m^2$  的平均位移图

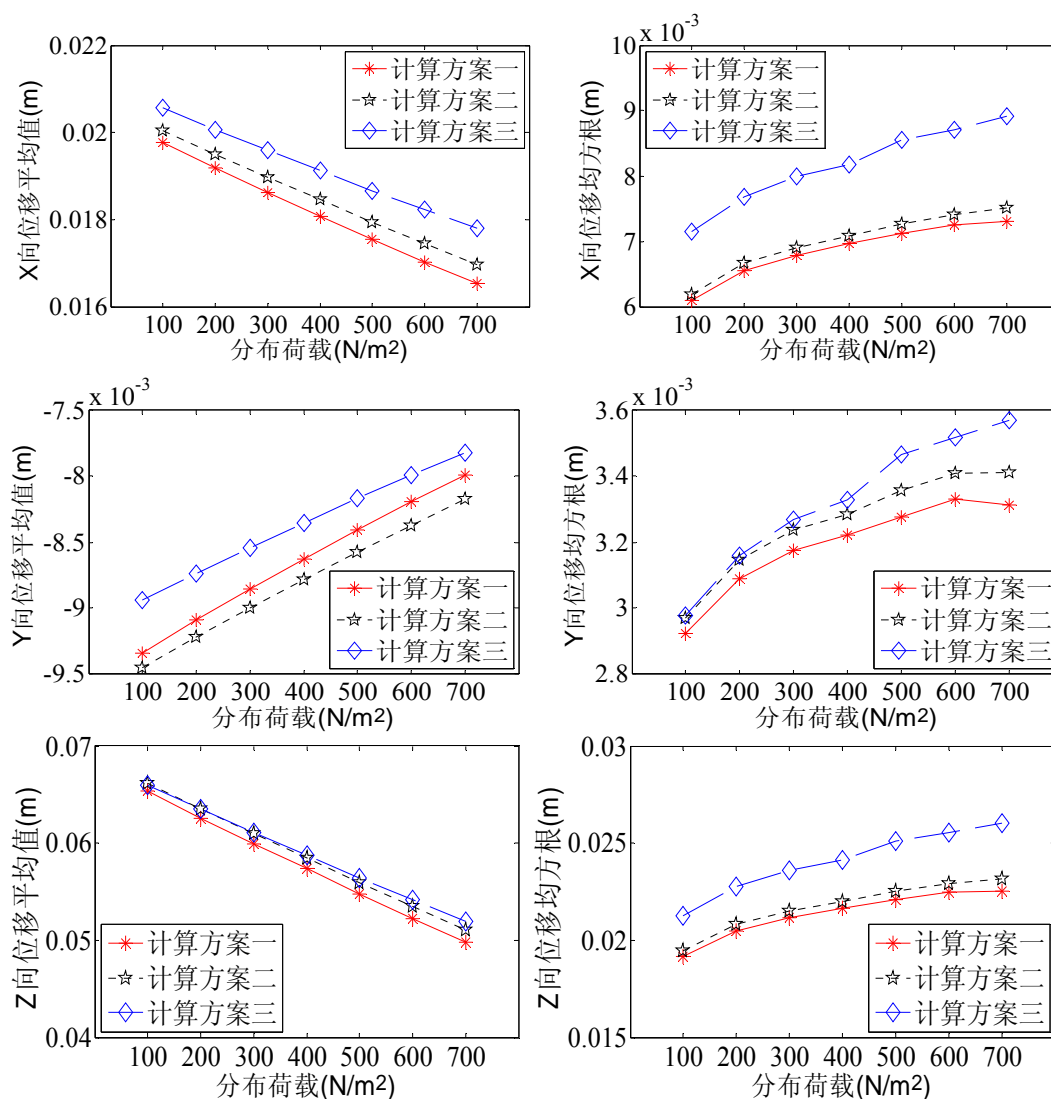
(d)  $FD=700N/m^2$  的脉动位移图

图 4.75 计算方案三中分布荷载对结构变形的影响

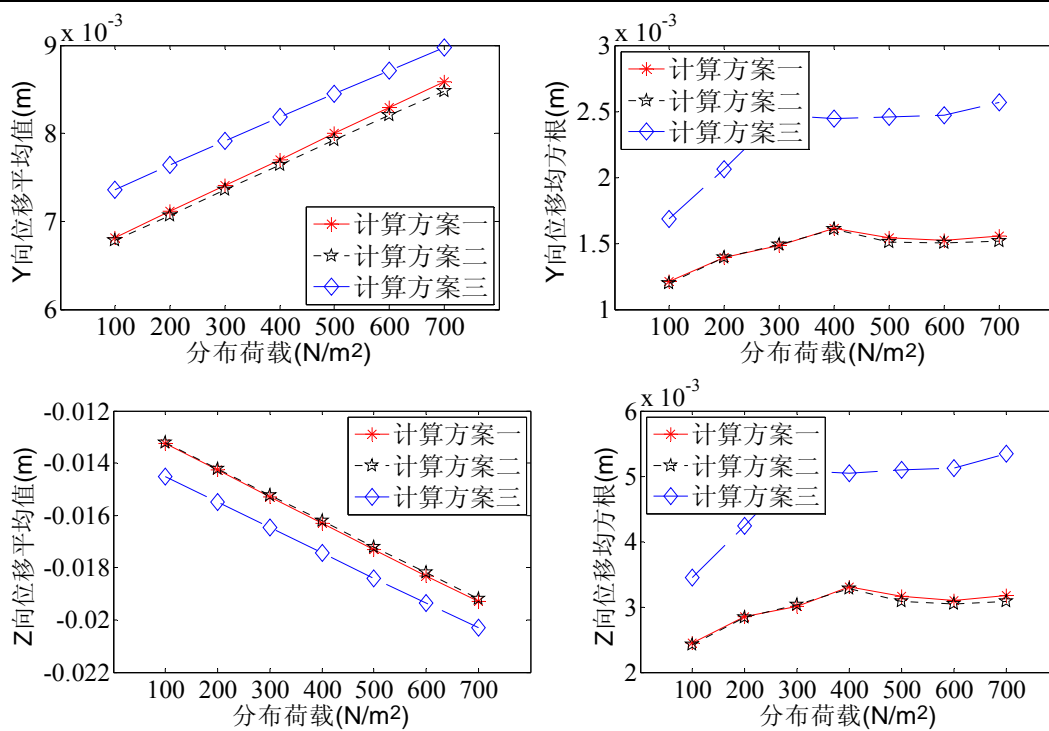
由图 4.73~图 4.75 可知，同断面面积一样，从整体的结构变形的角度来看，分布荷载的大小对结构变形的影响也不是太大。

## 2) 分布荷载对响应统计值的影响

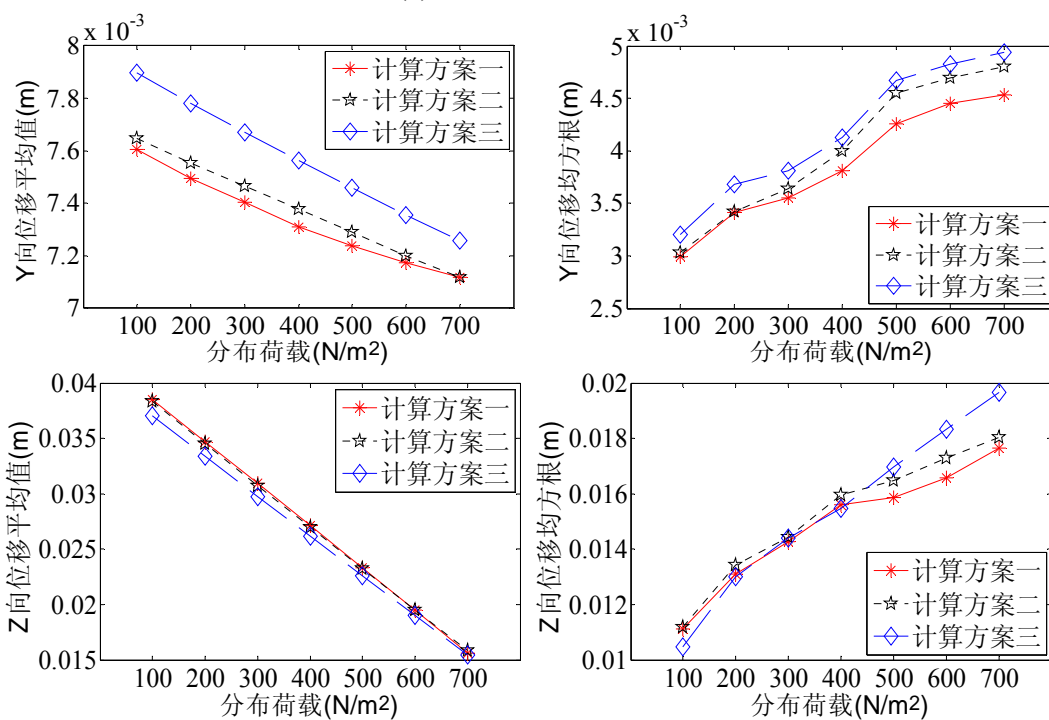
分布荷载对所选取的节点和单元的响应统计值的影响见图 4.76 和图 4.77。



(a) 节点 67 位移统计值

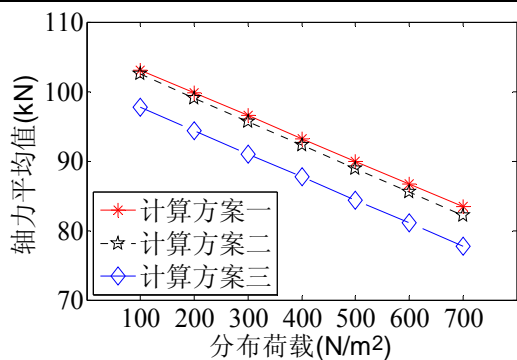


(b) 节点3位移统计值

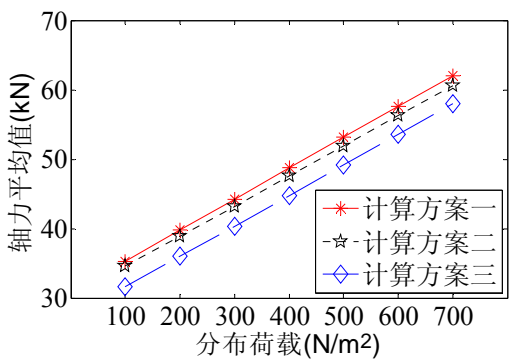
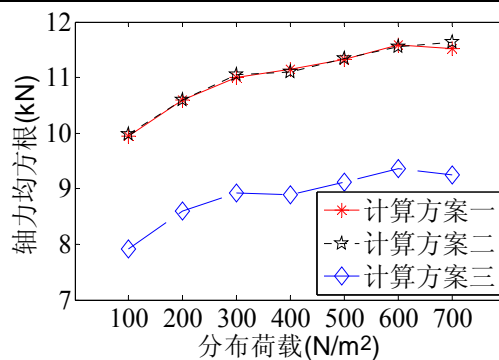


(c) 节点111位移统计值

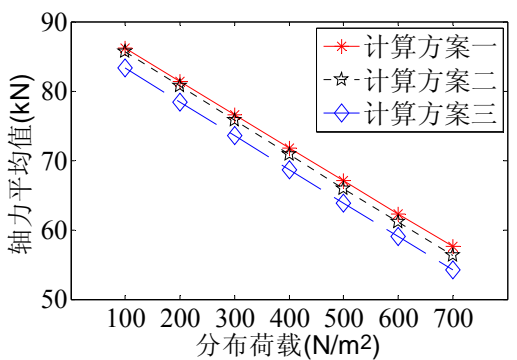
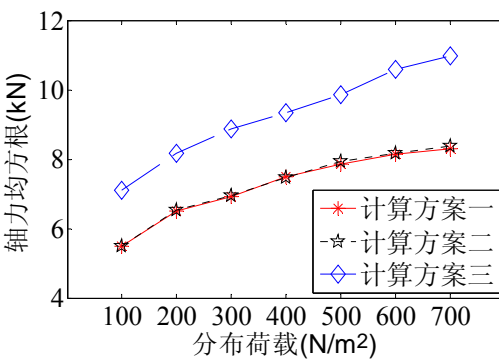
图 4.76 分布荷载对节点位移统计值的影响



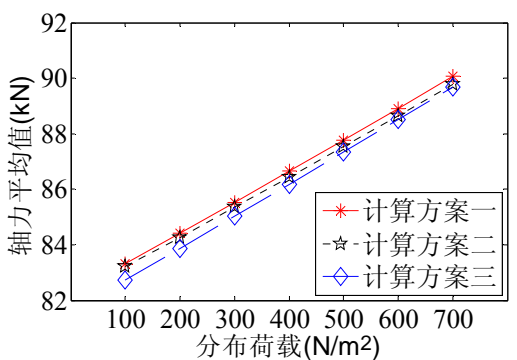
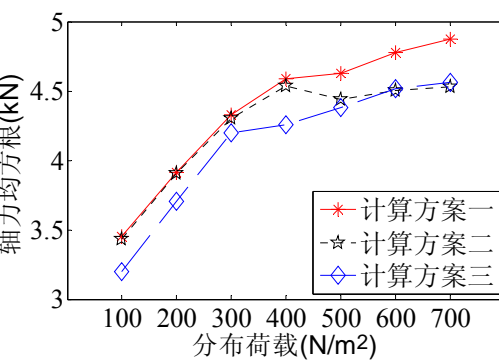
(a) 单元 267 轴力统计值



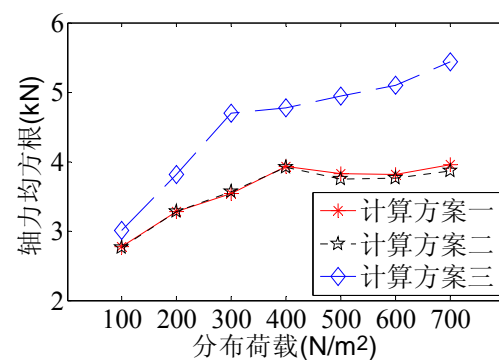
(b) 单元 59 轴力统计值



(c) 单元 203 轴力统计值



(d) 单元 2 轴力统计值



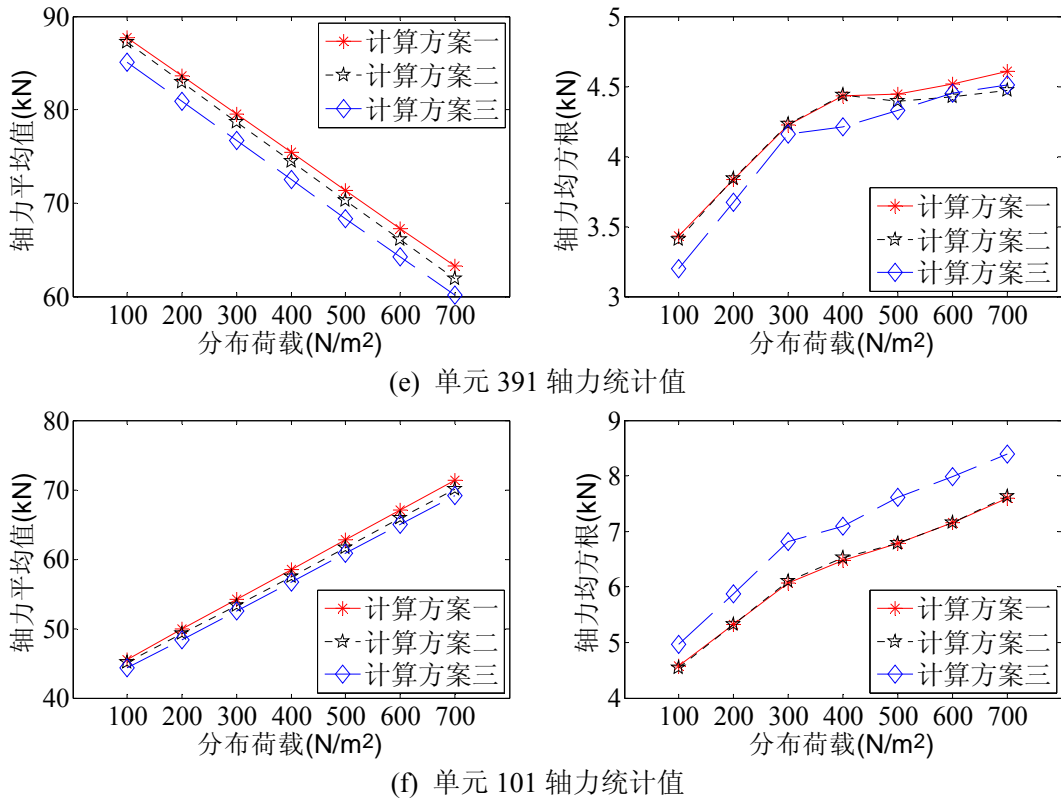


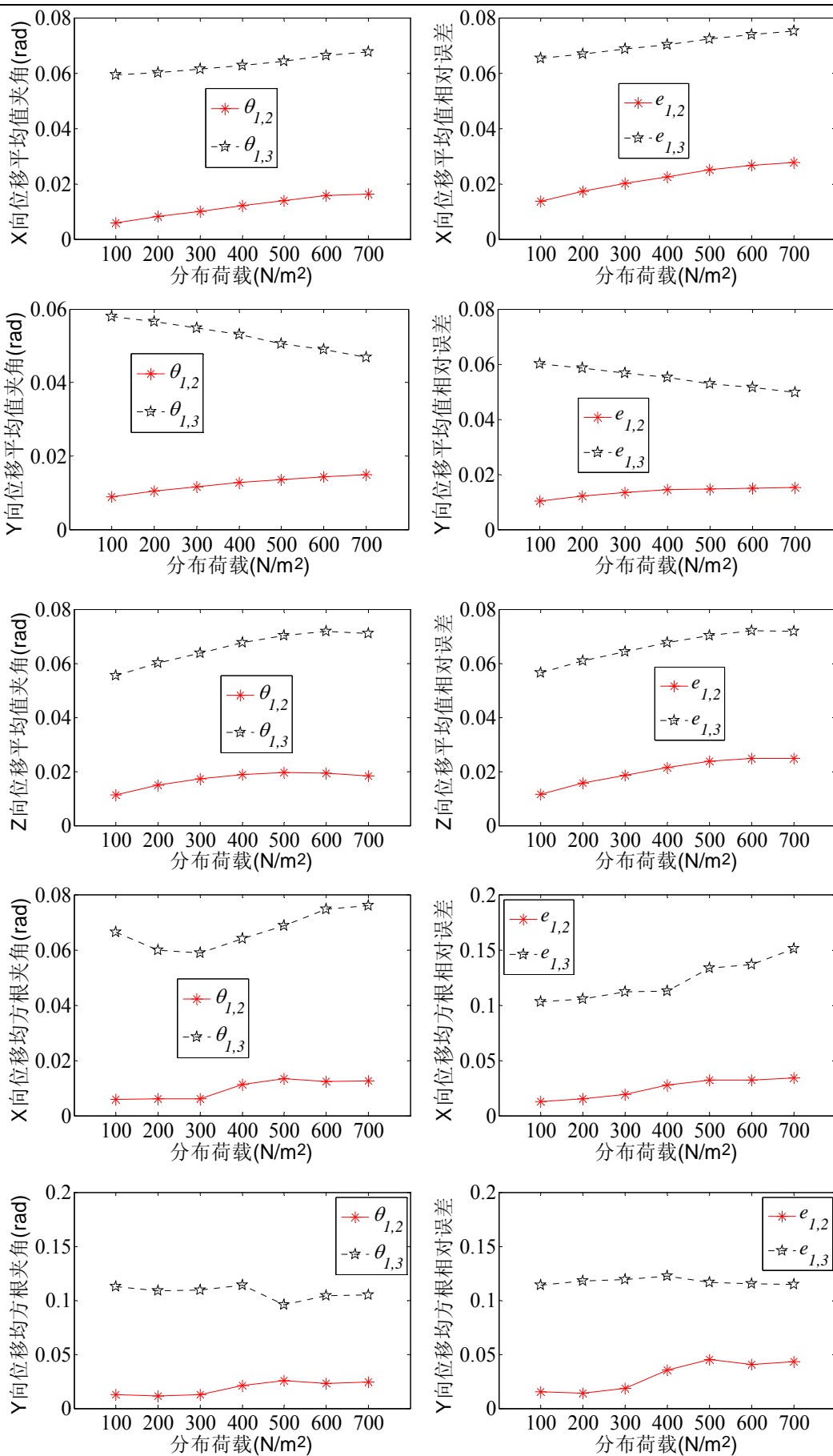
图 4.77 分布荷载对单元轴力统计值的影响

由图 4.76 可知：①负风压使得节点 67 同时存在向 X 轴正向、Y 轴负向和 Z 轴正向的运动趋势，但是分布荷载产生的集中质量却使节点向 Z 轴负向运动的趋势，因而不难得知分布荷载越大，集中质量越大，节点 67 的 X、Y 和 Z 向平均位移(绝对值)均减小，同样可知分布荷载的大小对节点 3 和 111 的位移平均值的影响趋势，在此不再予以详述；②分布荷载越大，结构越柔，位移均方根越大，且均方根和均值具有相同的数量级，文献[174]发现当悬索结构的结构形式确定之后，无论其屋面覆盖层材料如何，对脉动风的反应没有明显改善；③虽然均值与分布荷载几乎成一个线性关系，但是均方根与分布荷载之间呈现非线性关系。不过总的来说，当分布荷载较小时，均方根和分布荷载之间呈现一个弱的非线性关系。

由图 4.77 可知：①当分布荷载增加时，稳定索有松弛趋势，而承重索有张紧趋势，因而稳定索的轴力平均值随分布荷载的增加而减小，承重索的轴力平均值随分布荷载的增加而增加；②总的来说，分布荷载越大，轴力均方根越大，不过均方根的变化不是很明显；③同位移一样，虽然轴力均值与分布荷载之间几乎成一个线性关系，但是轴力均方根与分布荷载之间是一个非线性关系，当分布荷载较小时，轴力均方根与分布荷载之间是一个弱的非线性。

分布荷载对响应统计值的整体误差的影响见图 4.78 和图 4.79。





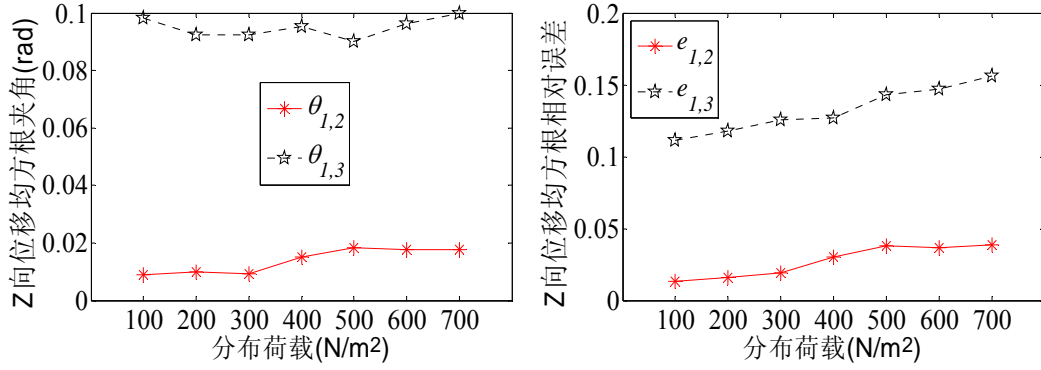


图 4.78 分布荷载对节点位移统计值整体误差的影响

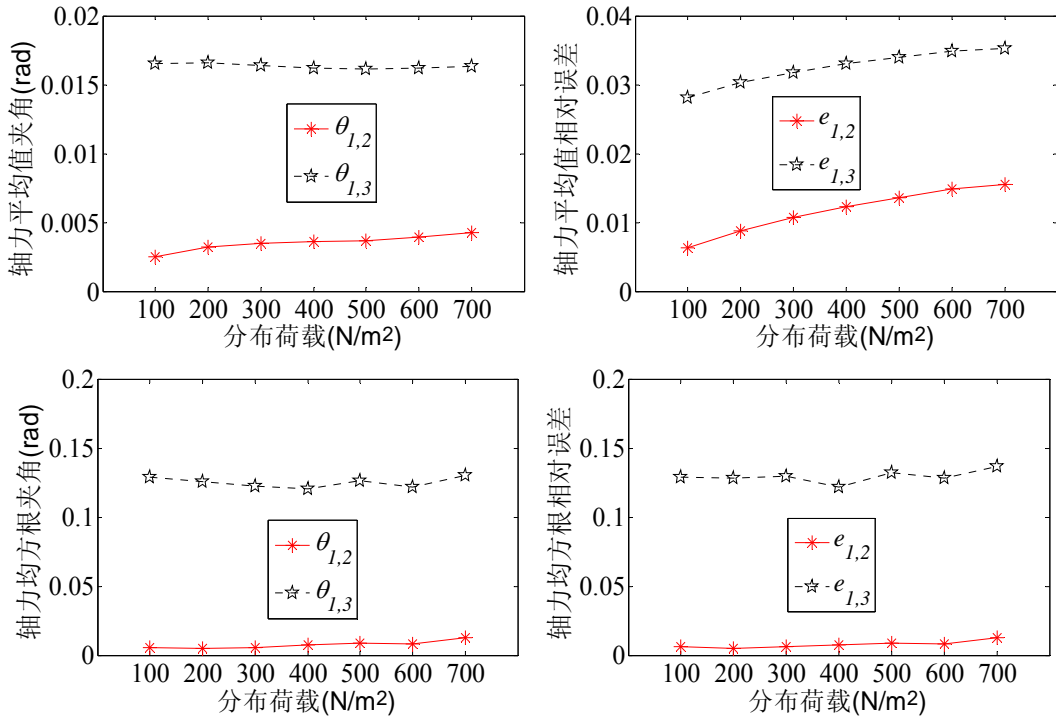
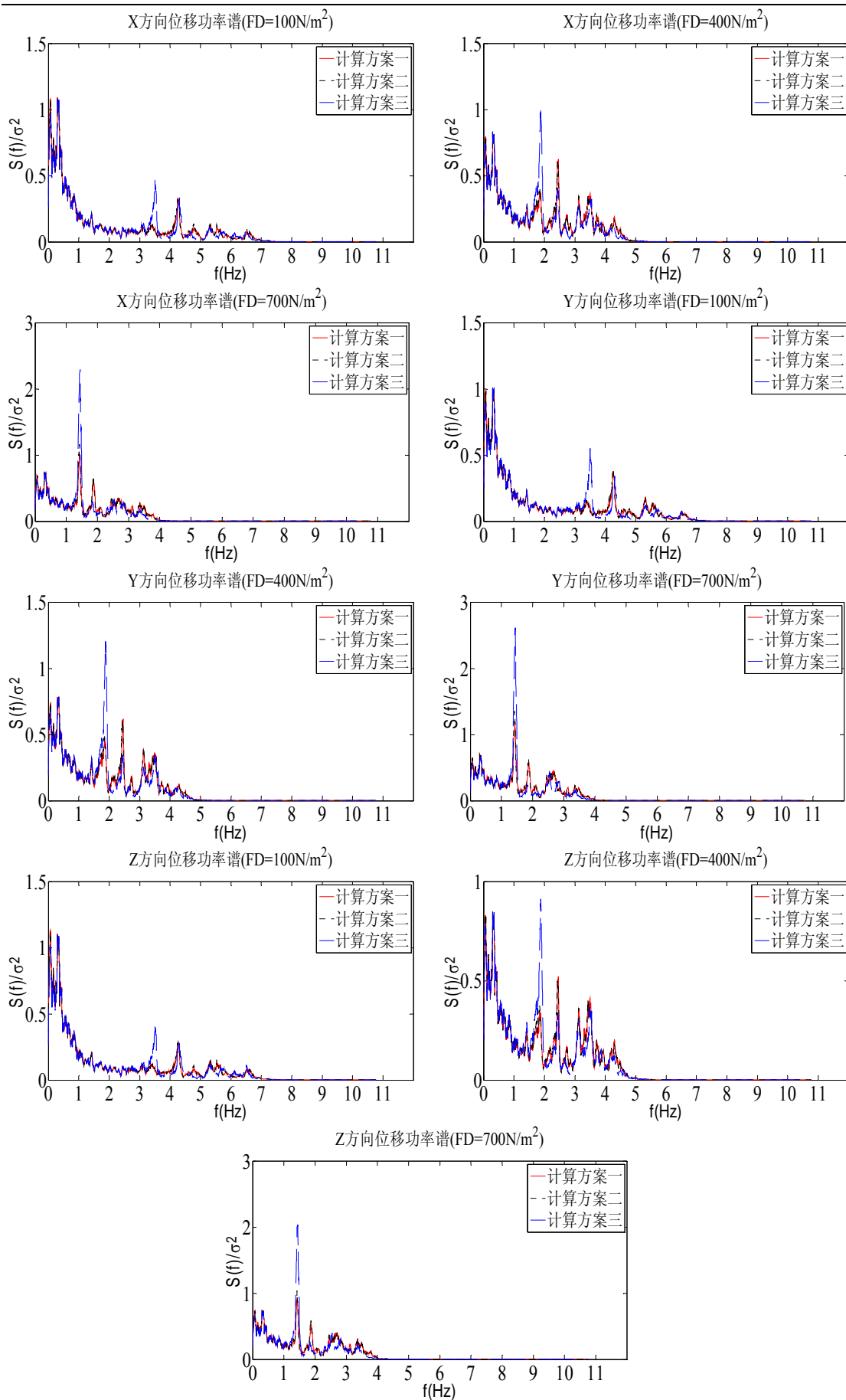


图 4.79 分布荷载对单元轴力统计值整体误差的影响

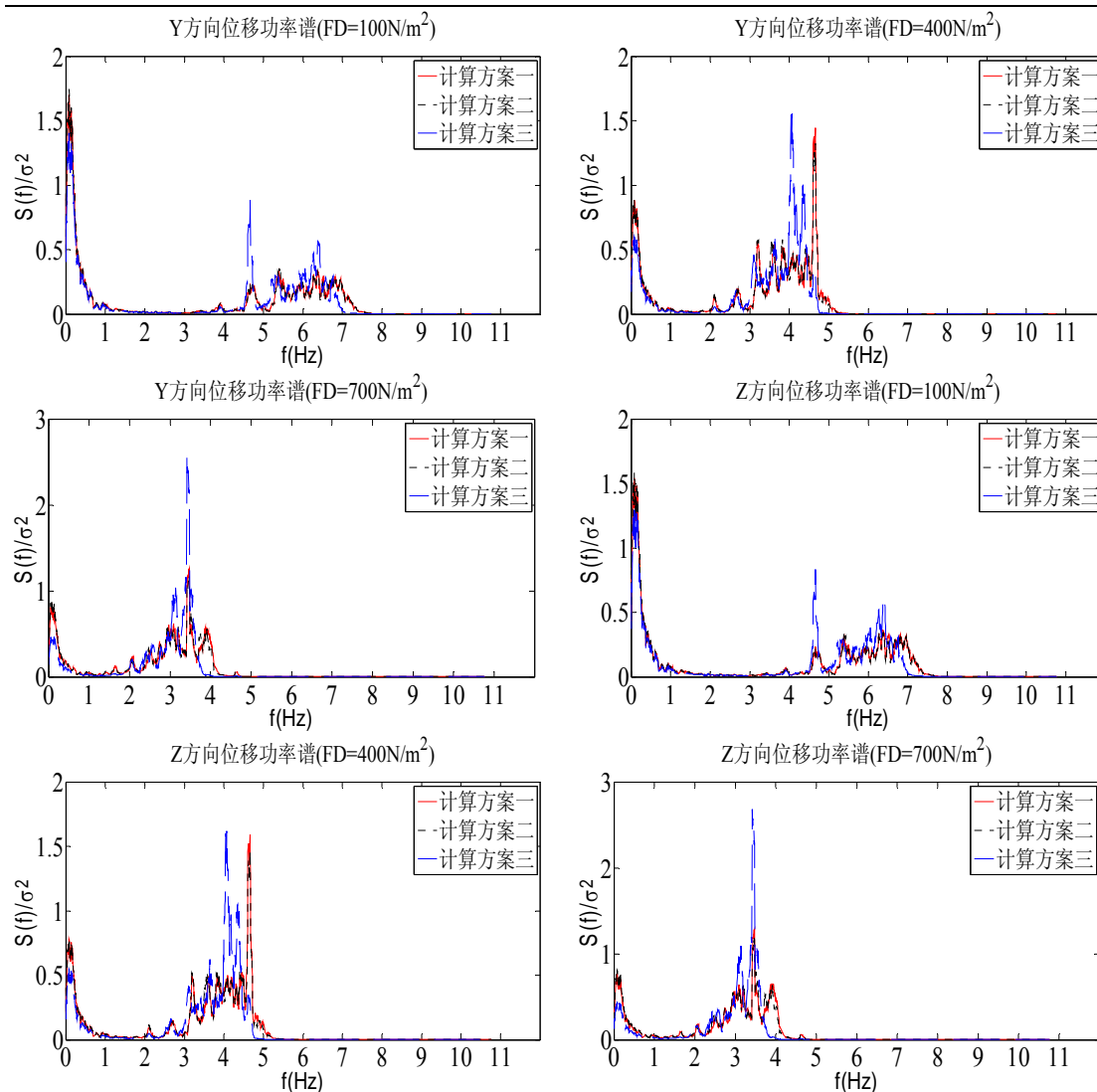
由图 4.78 和图 4.79 可知：①计算方案一、二之间的整体误差  $\theta_{1,2}$  和  $e_{1,2}$  依然小于计算方案一、三之间的整体误差  $\theta_{1,3}$  和  $e_{1,3}$ ；②整体误差的大小受分布荷载大小的影响较小，虽然分布荷载成倍增加，但是整体误差变化不大，比较平稳。

### 3) 分布荷载对响应功率谱密度的影响

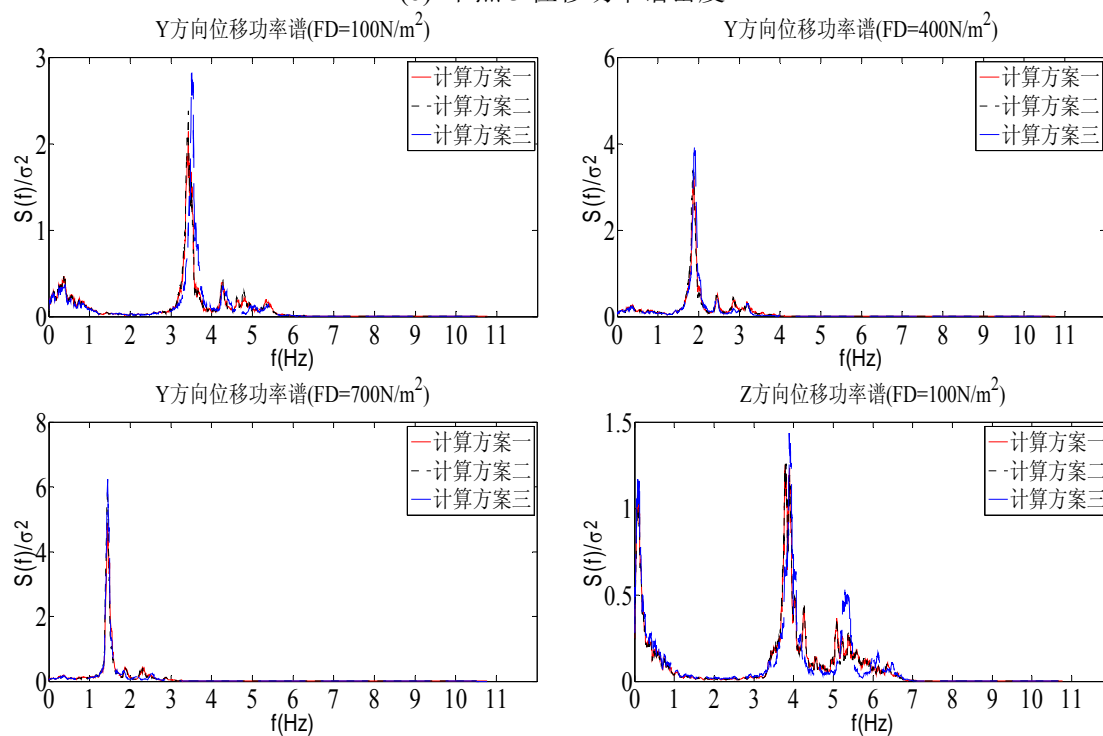
分布荷载对节点位移和单元轴力响应功率谱密度的影响分别见图 4.80 和图 4.81。

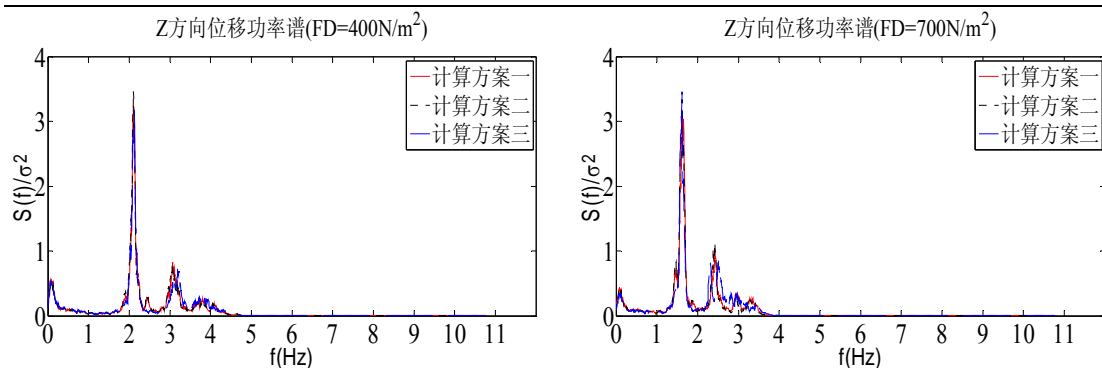


(a) 节点 67 位移功率谱密度



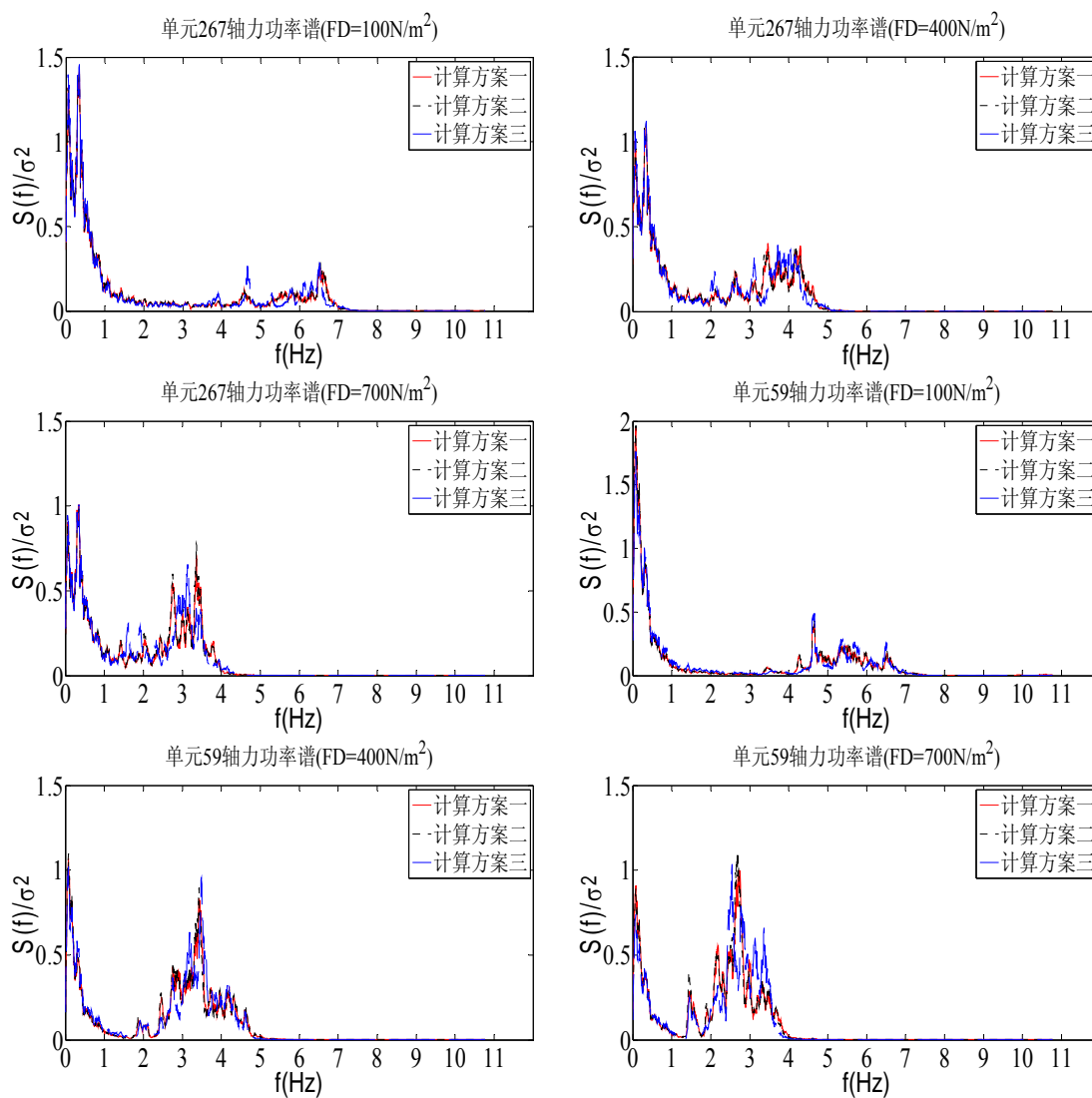
(b) 节点 3 位移功率谱密度

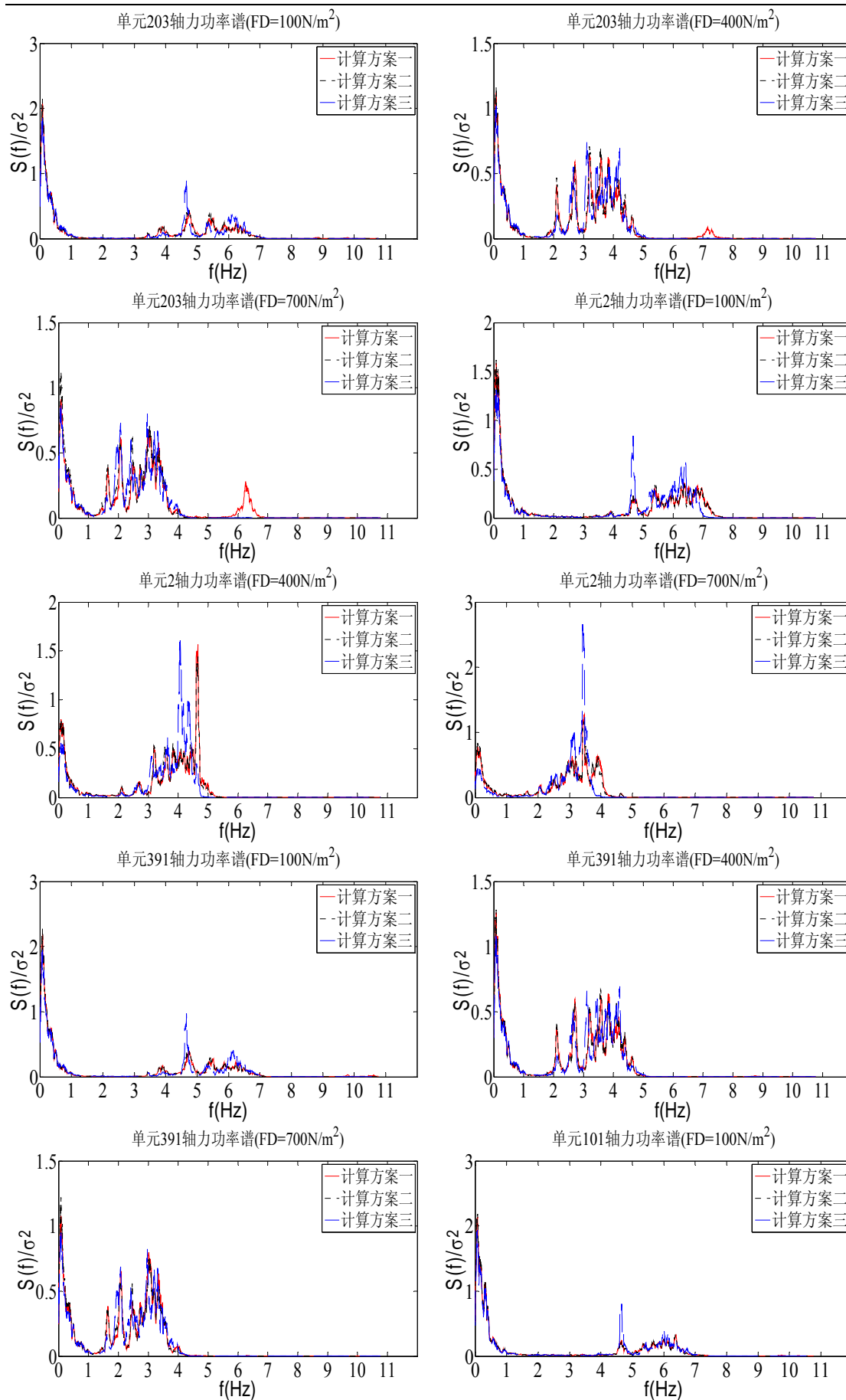




(c) 节点 111 位移功率谱密度

图 4.80 分布荷载对节点位移功率谱密度的影响





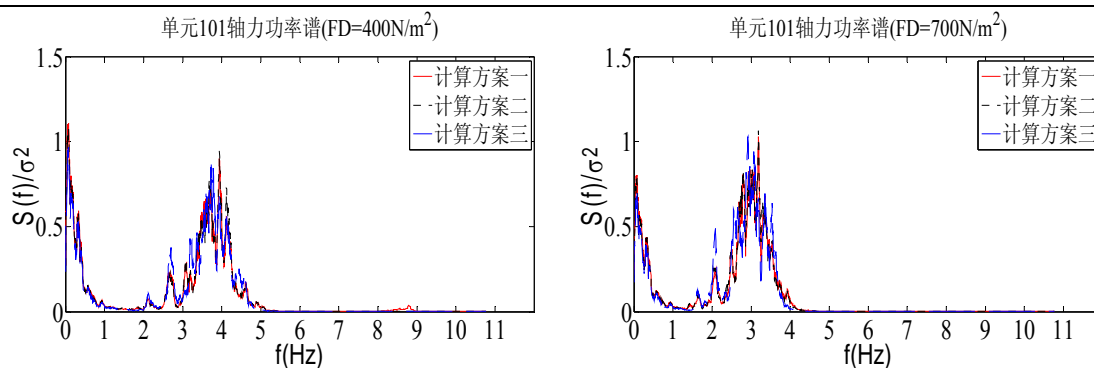
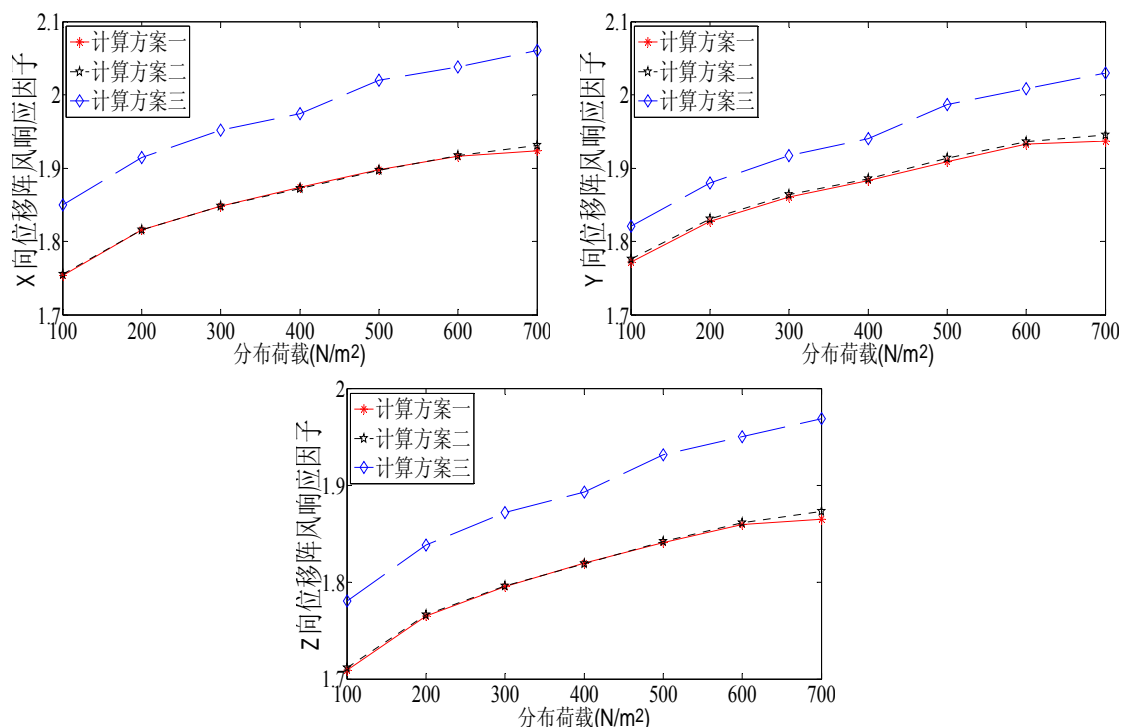


图 4.81 分布荷载对单元轴力功率谱密度的影响

由图 4.80 和图 4.81 可知：①在所研究的节点和单元的响应功率谱密度中，背景分量和共振分量所占比例的特点依然同本章前文，不再赘述；②分布荷载越大，节点 111 的共振响应越明显，其共振峰值处的频率也越小；③响应功率谱密度带宽较宽，结构的非线性振动依然是一个需要考虑多频率的宽带过程，不过分布荷载越大，响应功率谱密度带宽频段越小；④在同一分布荷载情况下，不同响应的功率谱密度形状差异较大，依然体现了索网结构非线性风致响应的复杂性。

#### 4) 分布荷载对阵风响应因子的影响

分布荷载对阵风响应因子的影响见图 4.82 和图 4.83。



(a) 节点 67 的位移阵风响应因子

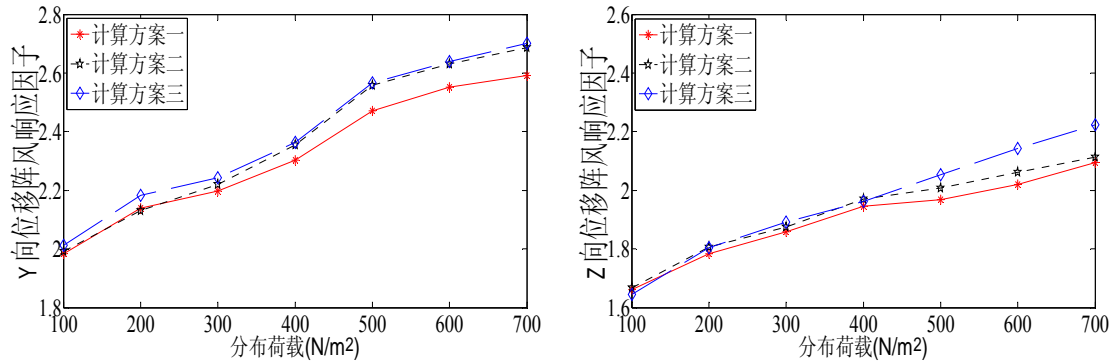
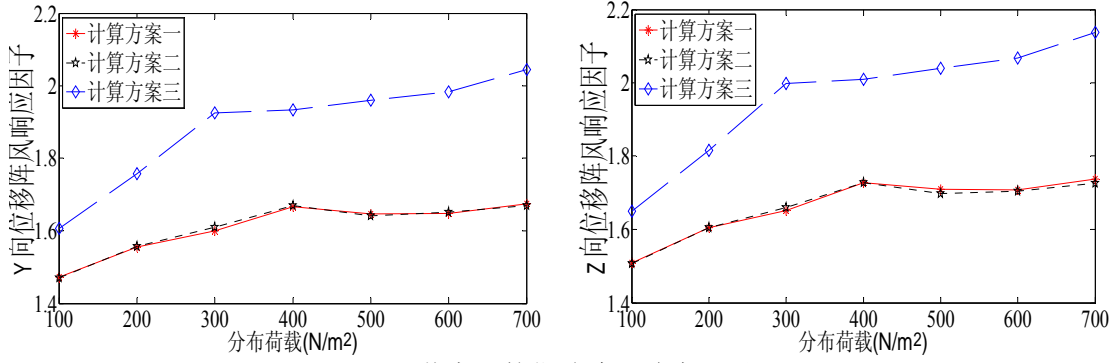
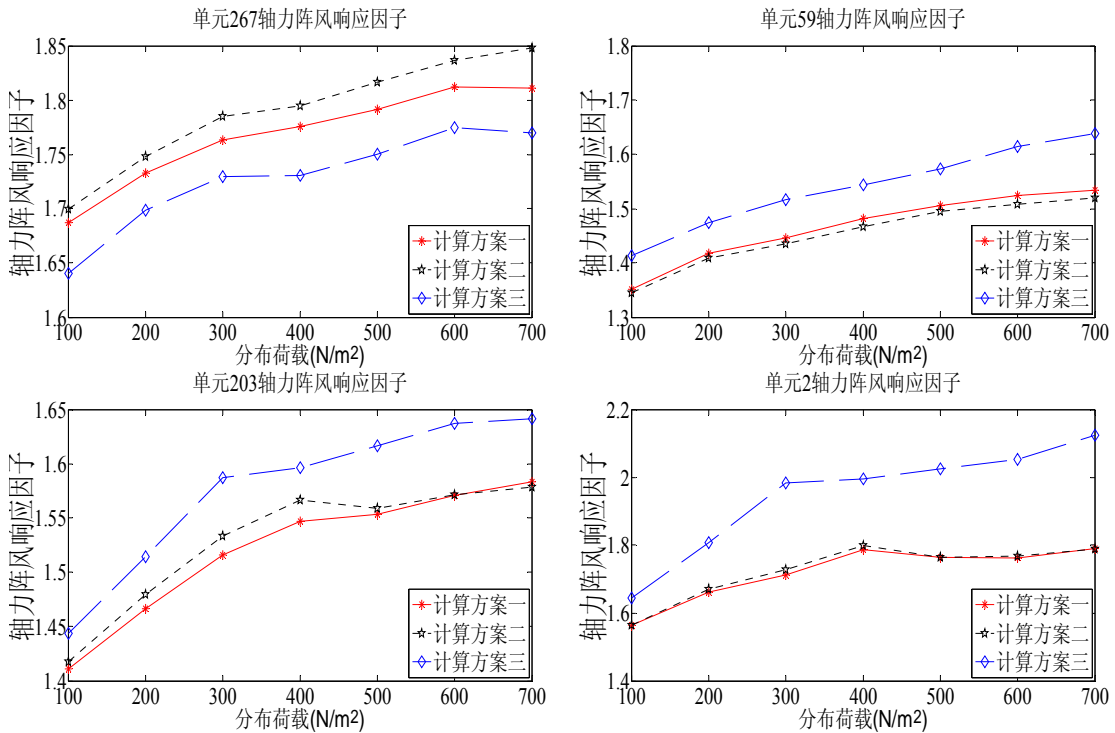


图 4.82 分布荷载对节点位移阵风响应因子的影响





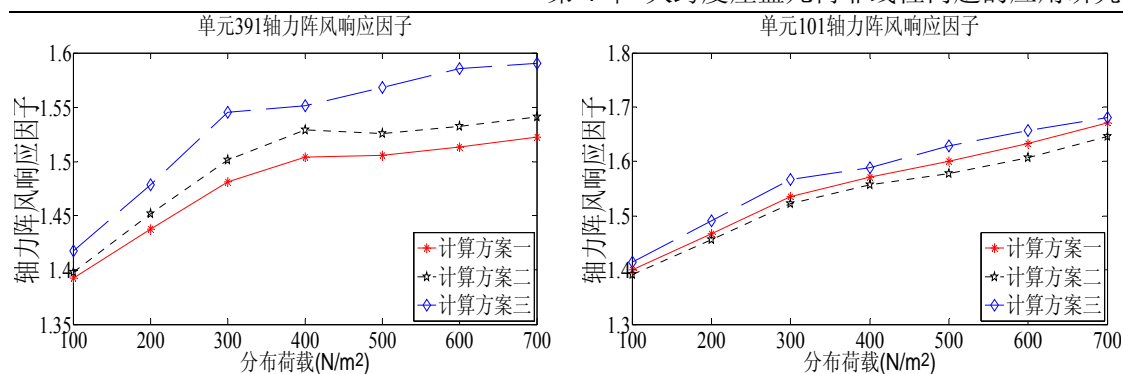


图 4.83 分布荷载对单元轴力阵风响应因子的影响

由图 4.82 和图 4.83 可知：①阵风响应因子的值依然随着节点位置和单元位置的不同而不同，而且基本上也随着分布荷载的变化而变化，阵风响应因子依然通常不能取为一常量；②大体上来说，当分布荷载较小时，阵风响应因子增长较快，当分布荷载较大时，阵风响应因子比较平稳，变化不大。

### 5) 三种计算方案的对比分析

前文就分布荷载对响应的影响进行了较为详细的阐述，本章在此对三种计算方案的结果进行对比分析，由图 4.76~图 4.83 不难得知：

- (1) 当分布荷载较小时，结构大致上表现出弱的非线性。
- (2) 无论分布荷载大小如何，计算方案一、二之间的差异总体依然较计算方案一、三之间的差异小，因此采用近似计算方案时，依然宜采用方案二考虑平均风荷载引起的非线性。

#### 4.3.3.4 基本风压对自振频率、模态和响应的影响

本章前文在研究参数对自振频率、模态和响应的影响时，没有考虑基本风压  $BW$  的变化影响。当基本风压  $BW$  发生变化时，风荷载时程的大小和时间步长均要发生变化，本小节将研究基本风压单独变化时对自振频率、模态和响应的影响。不过需要首先说明的是，当仅考虑基本风压变化时，不难由前文可知只有计算方案二的自振频率和模态受基本风压变化的影响，本小节只对此进行研究。但是在对比分析频率时(见图 4.85)，依然给出计算方案一、三中的自振频率。相关的计算参数为：初始预拉力  $T_0 = 80kN$ ，索断面面积为  $A = 355.98mm^2$ ，屋盖分布荷载为  $FD = 600N/m^2$ ，以 0 度风向角的试验结果进行风致响应计算，基本风压  $BW = 0.3、0.45、0.6、0.75、0.9、1.05、1.2KPa$ ，其对应的基本风速分别为  $U_{10} = 21.91、26.83、30.98、34.64、37.95、40.99、43.82m/s$  [62]，屋盖高点处的风速分别为  $U_H = 23.62、28.93、33.40、37.35、40.91、44.19、47.24m/s$ ，风荷载时程的时间步长分别为  $\Delta T = 0.0734、0.0599、0.0519、0.0464、0.0424、0.0392、0.0367s$ ，原型/模型的风速相似比分别为 2.18、2.67、3.08、3.45、3.78、4.08、4.36。

## 1、基本风压对计算方案二中自振频率的影响

在计算方案二中，基本风压对时程计算时初始位形的自振频率的影响见图 4.84。

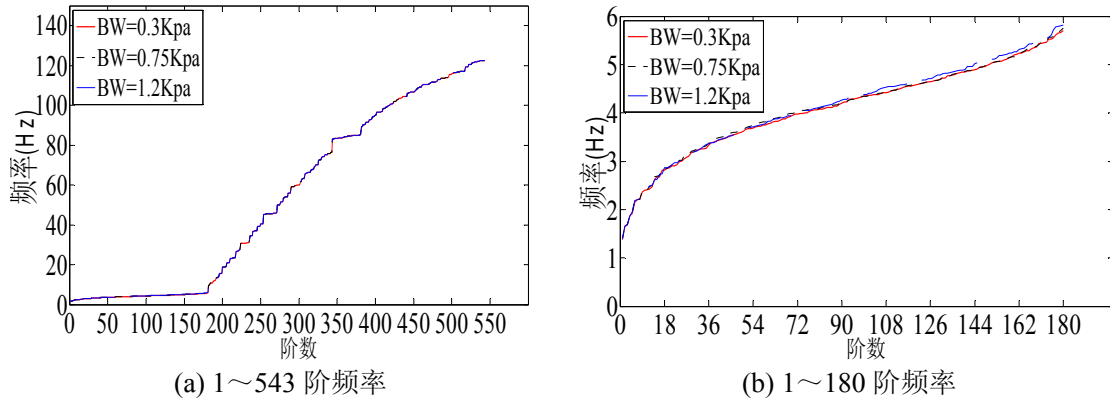


图 4.84 计算方案二中基本风压对自振频率的影响

由图 4.84 可知：基本风压的大小对自振频率几乎没有影响，结构频率仍然大致在第 181 阶后产生较为明显的增长。结构低频段的频率依然呈密集的、连续性的分布，在进行动力时程分析时同样需要考虑多个低阶频率对 Rayleigh 阻尼矩阵的影响，本小节在用式(3.75)计算  $a_0$  和  $a_1$  时，依然考虑了结构前 180 阶频率的影响(包括计算方案一和计算方案三)， $\omega_i$  和  $\omega_j$  的取法同本章前文。

本章在此也同样分析在相同基本风压情况下、不同计算方案之间的 1~180 阶频率之间的差异(笔者注：基本风压对计算方案一、三中的自振频率没有影响，如此叙述主要是行文方便)，见图 4.85。

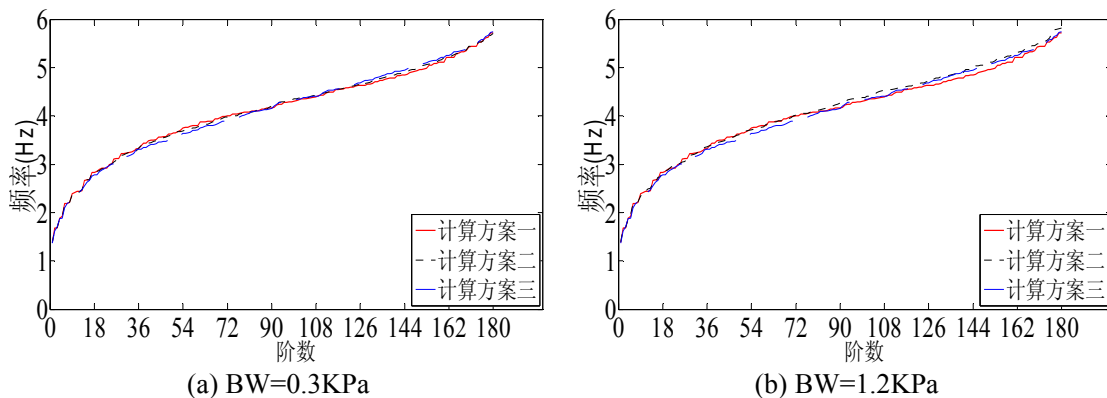


图 4.85 相同基本风压情况下、不同计算方案之间的低频段之间的差异

由图 4.85 可知，基本风压的大小对不同计算方案中的低频段的频率影响很小。

## 2、基本风压对计算方案二中结构模态的影响

在计算方案二中，基本风压对时程计算时初始位形的结构模态的影响见图 4.86~图 4.88。

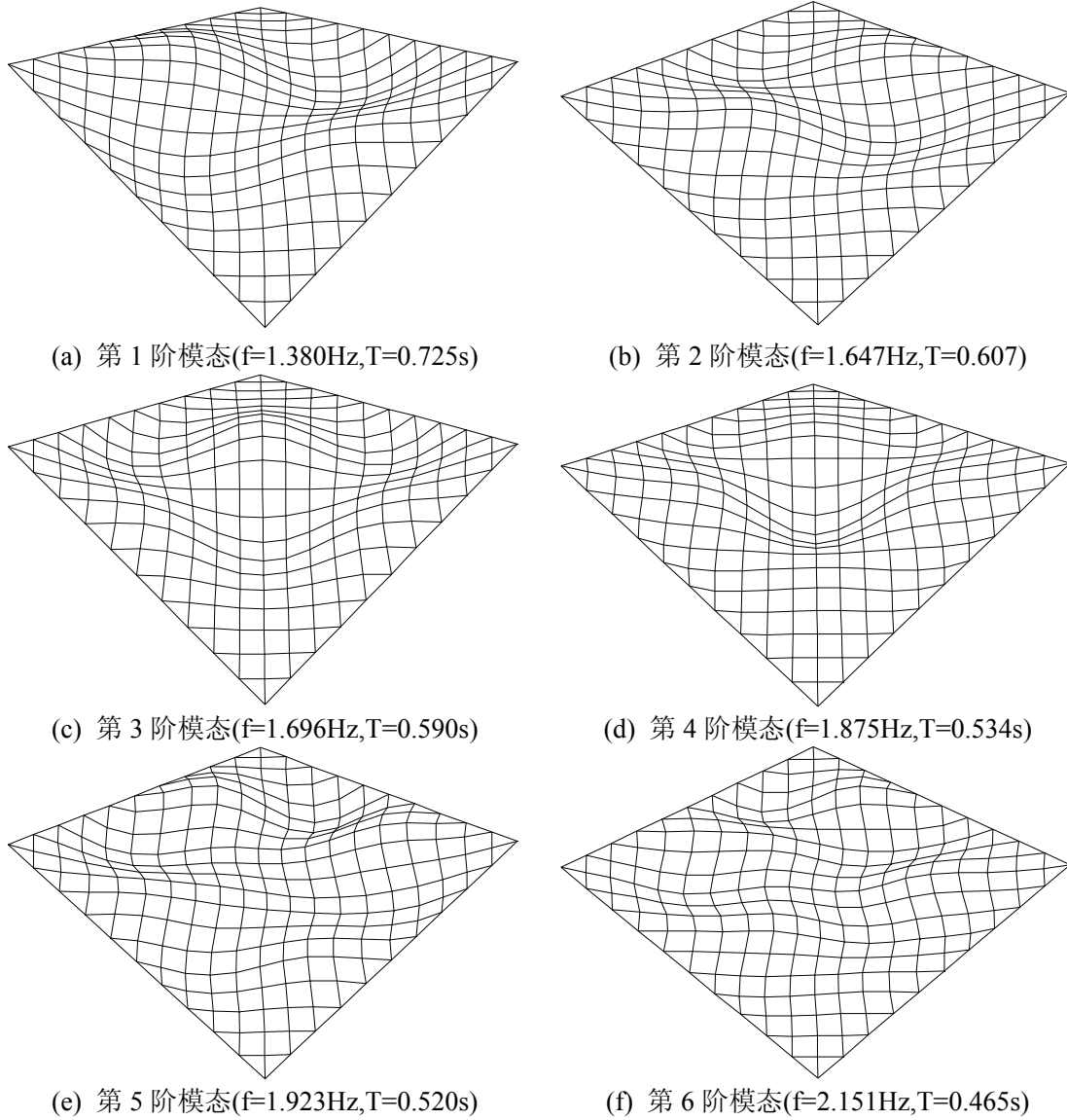
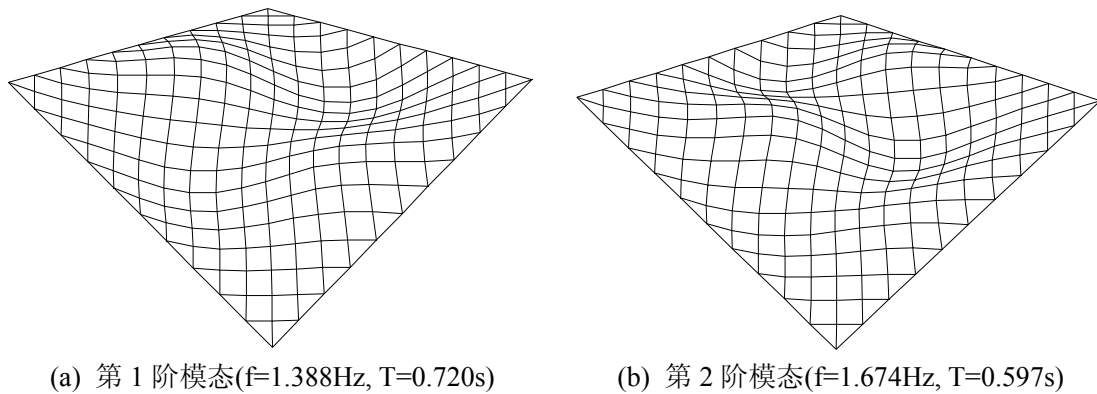


图 4.86 计算方案二中基本风压  $BW=0.3\text{KPa}$  时的部分结构模态



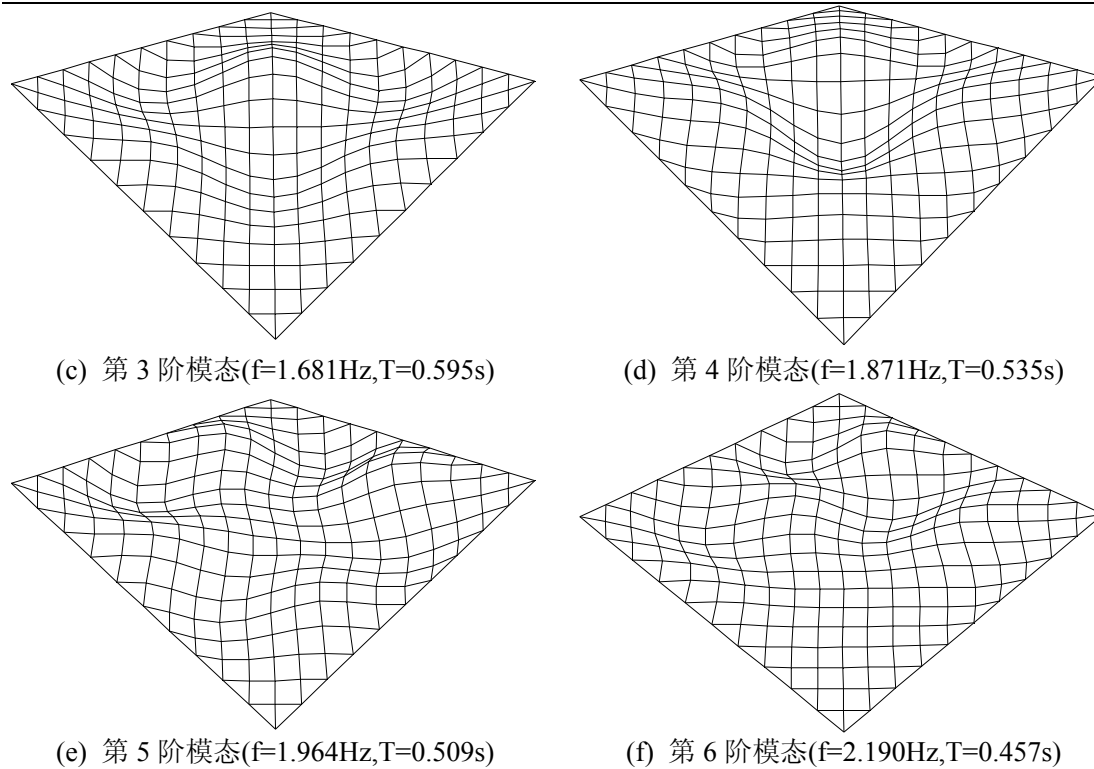
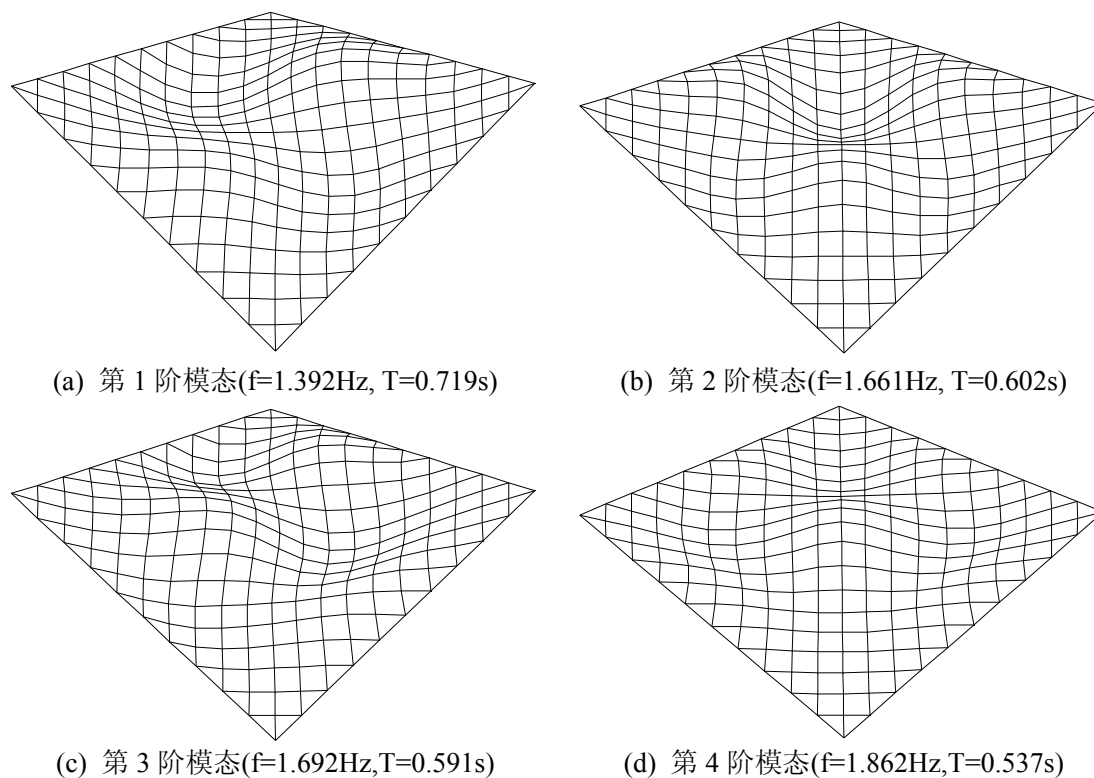
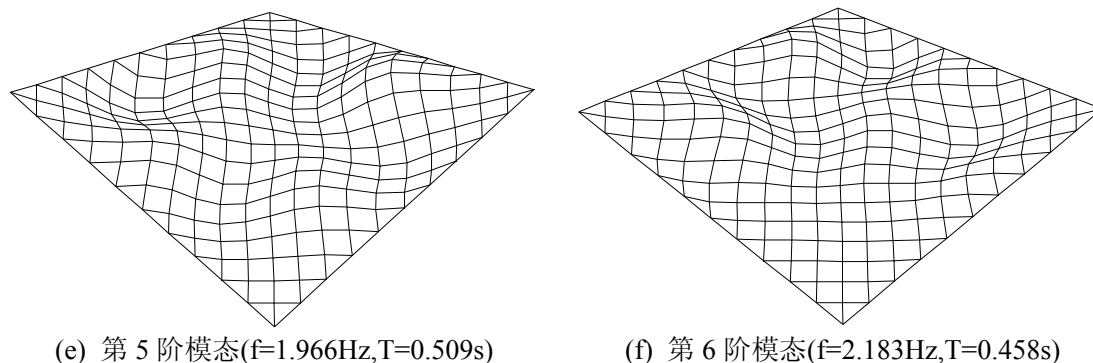


图 4.87 计算方案二中基本风压  $BW=0.75\text{KPa}$  时的部分结构模态



图 4.88 计算方案二中基本风压  $BW=1.2\text{KPa}$  时的部分结构模态

由图 4.86~图 4.88 可知：①多数情况下，结构前若干阶模态仍然为单轴或双轴反对称形式，结构的第 1 阶模态依然为双轴反对称形式；②各阶模态在两个方向上依然均为多波曲线，整个曲面变化复杂，阶数越高，模态形状越复杂；③当基本风压较小时，它对同阶模态形状的几乎没有影响，而当基本风压较大时，部分同阶模态的形状便存在一定的差异。

### 3、基本风压对响应的影响

本小节将分析基本风压对响应统计值、响应功率谱密度和阵风响应因子的影响，对比分析三种计算方案的差异。

#### 1) 基本风压对结构变形的影响

三种计算方案中不同基本风压下结构的变形见图 4.89~图 4.91。

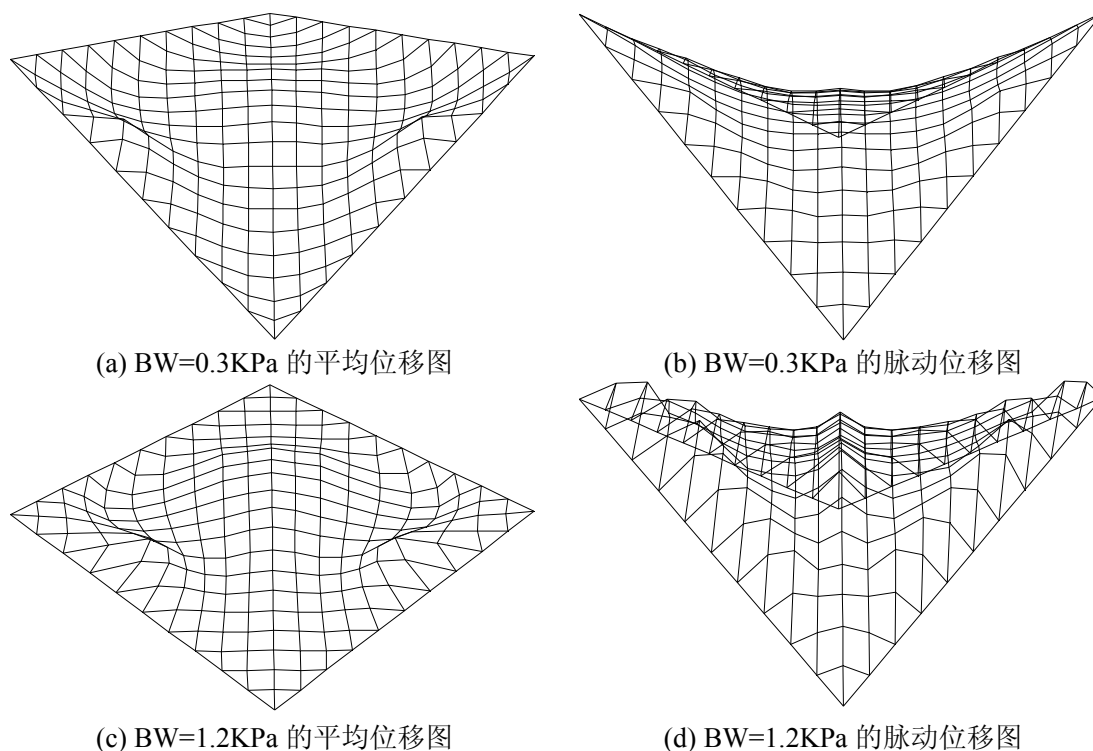


图 4.89 计算方案一中基本风压对结构变形的影响

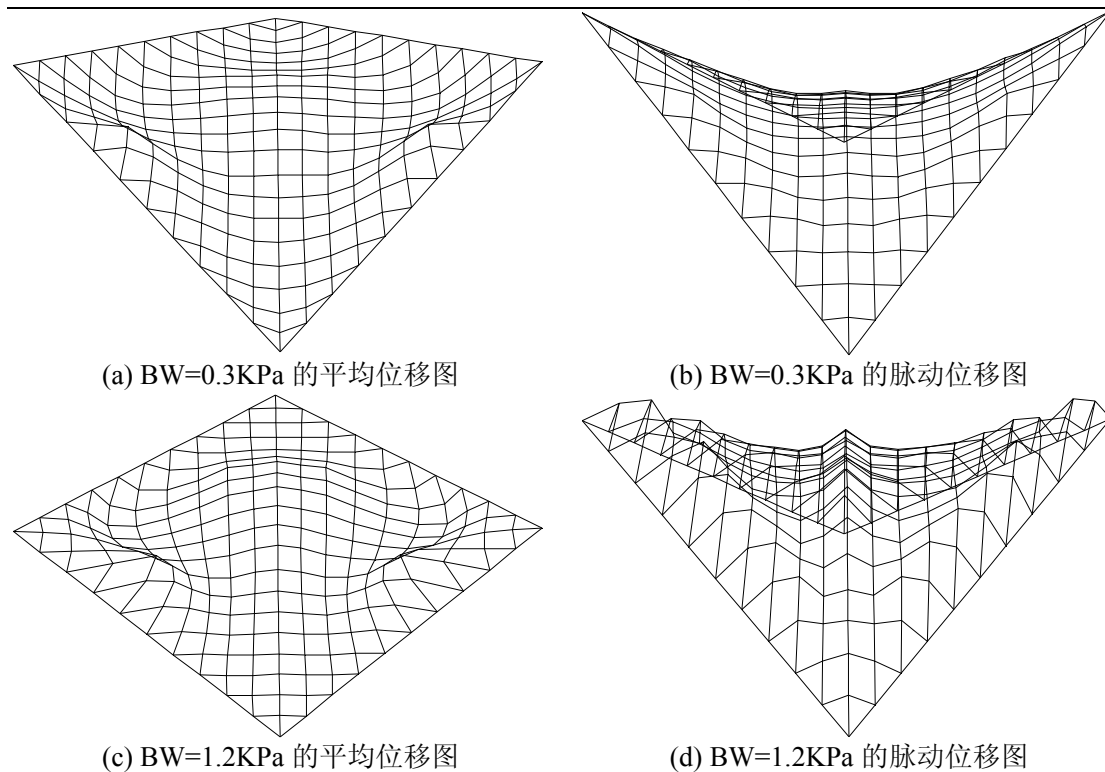


图 4.90 计算方案二中基本风压对结构变形的影响

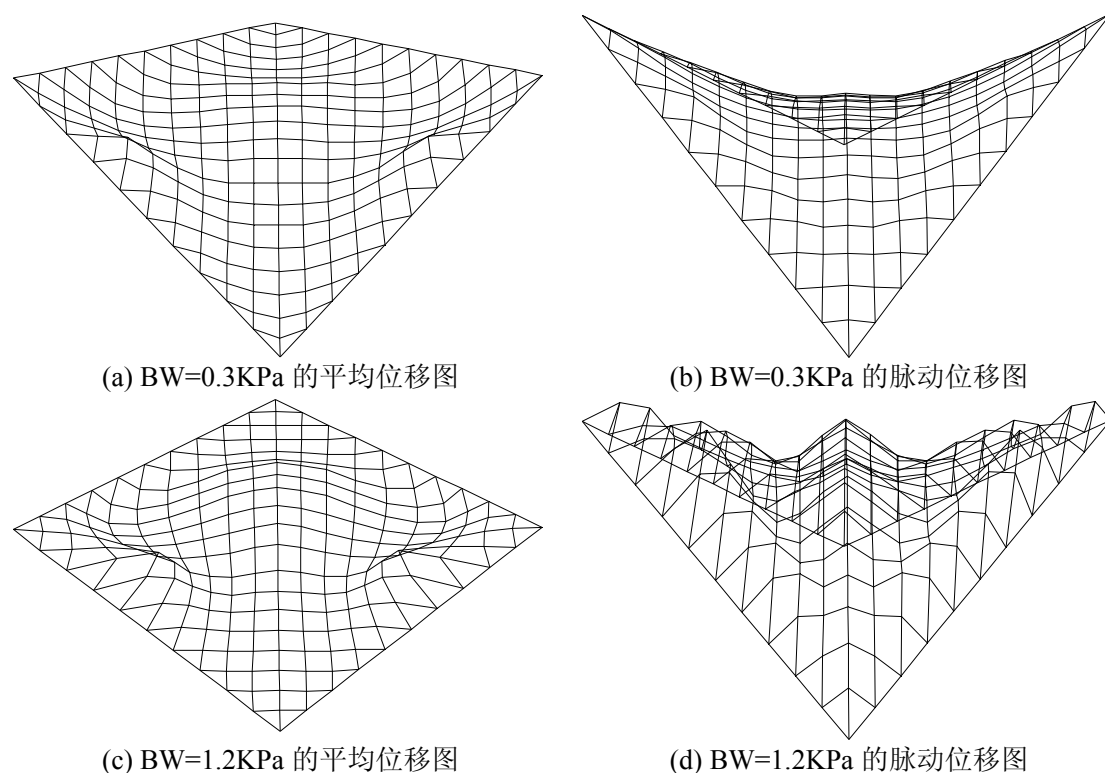
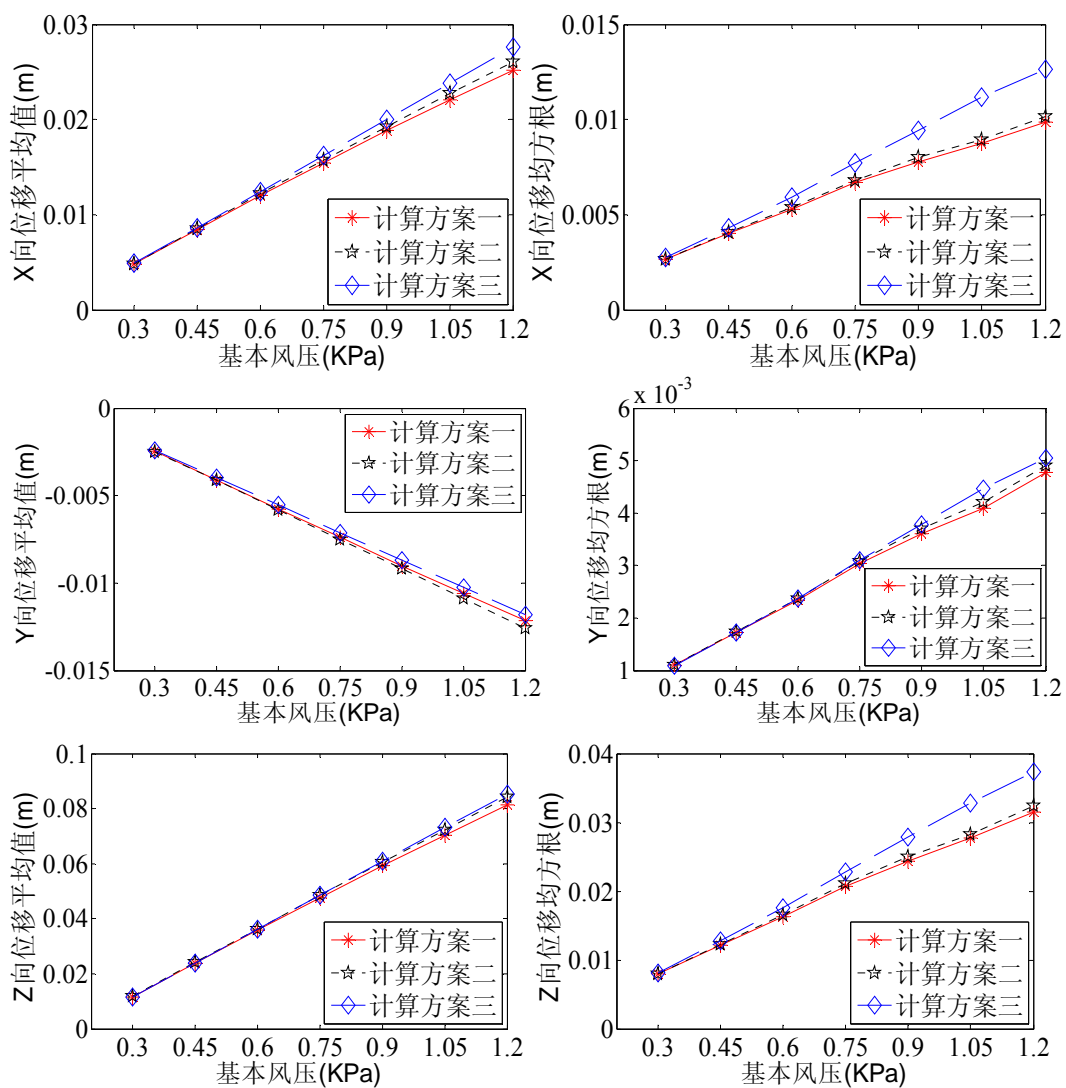


图 4.91 计算方案三中基本风压对结构变形的影响

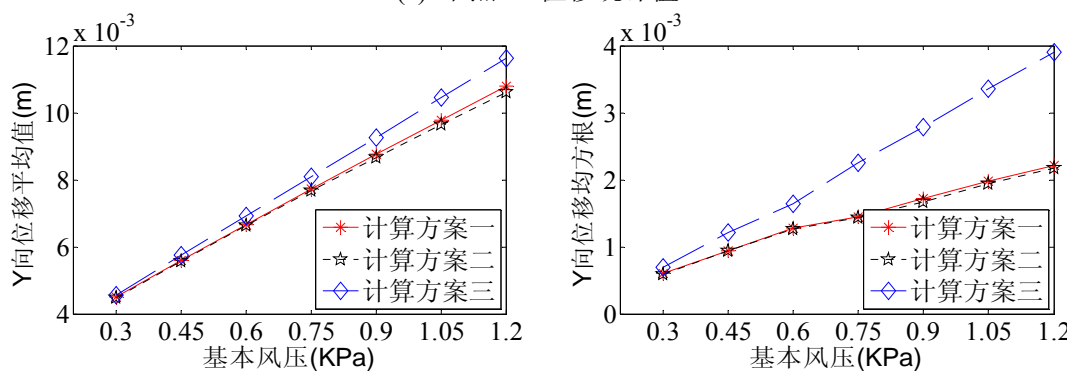
由图 4.89~图 4.91 可知，基本风压对结构的变形影响较大，基本风压越大，结构变形越明显。

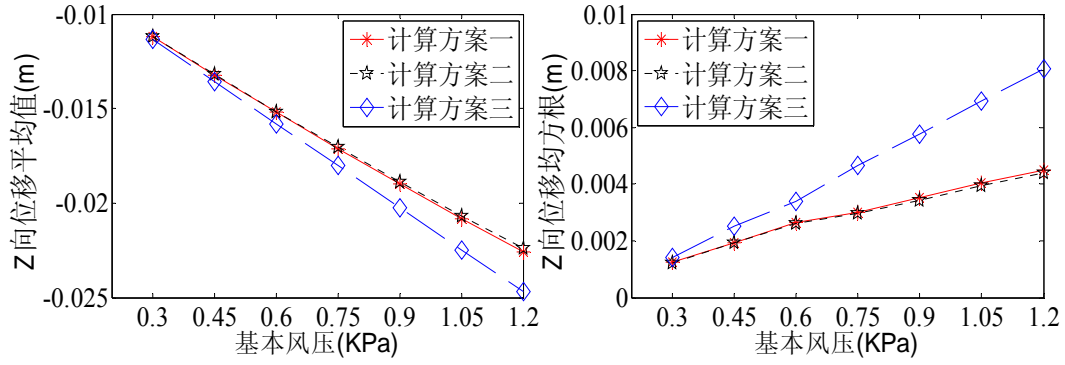
## 2) 基本风压对响应统计值的影响

基本风压对所研究节点和所研究单元的响应统计值的影响见图 4.92 和图 4.93。

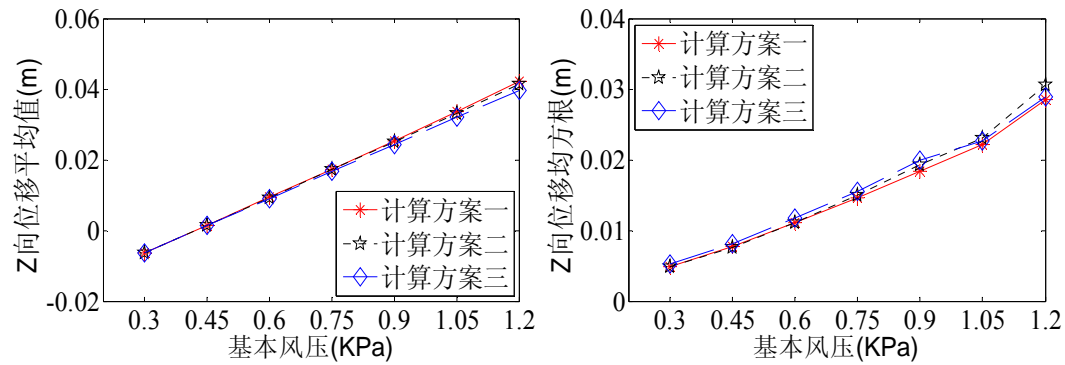
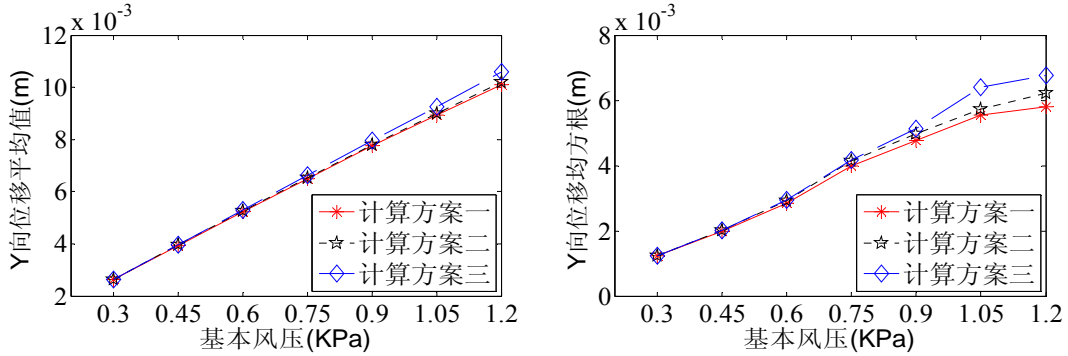


(a) 节点 67 位移统计值



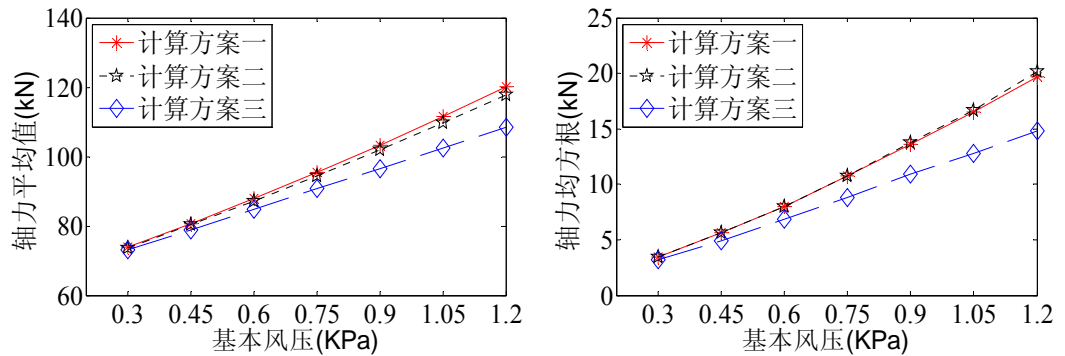


(b) 节点 3 位移统计值



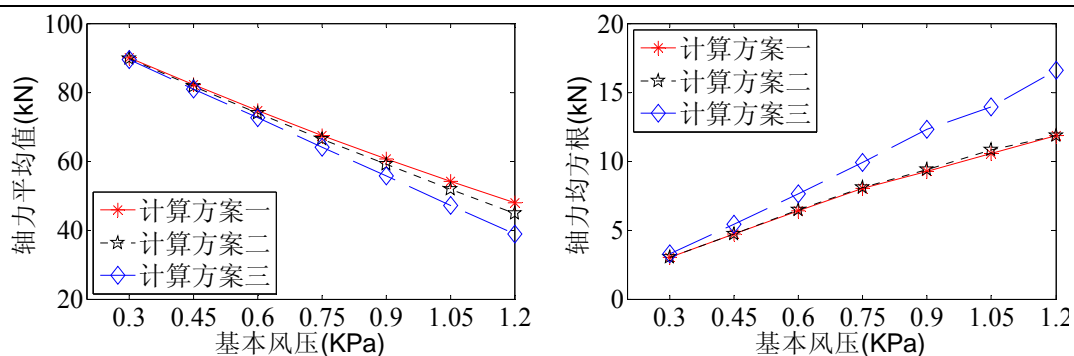
(c) 节点 111 位移统计值

图 4.92 基本风压对节点位移统计值的影响

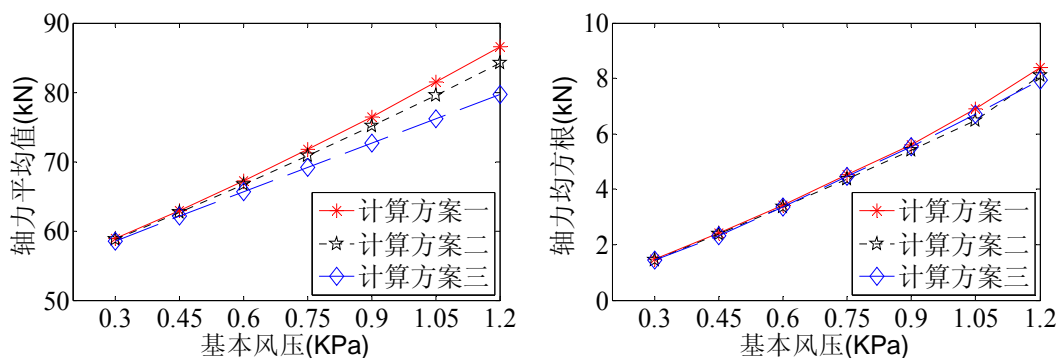


(a) 单元 267 轴力统计值

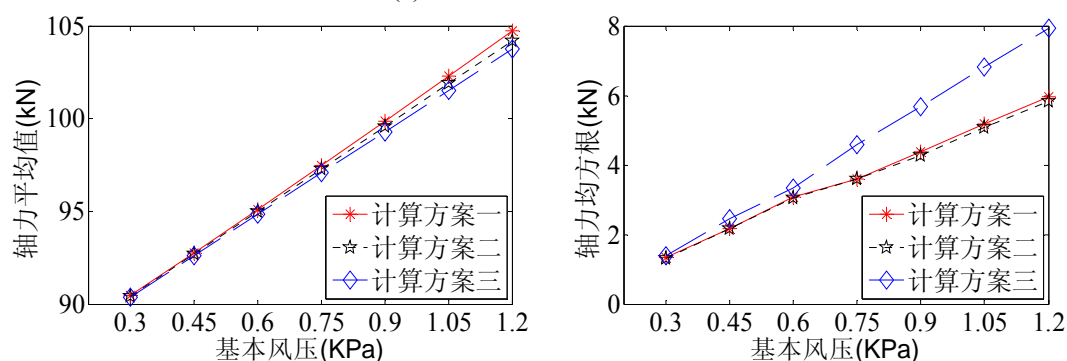




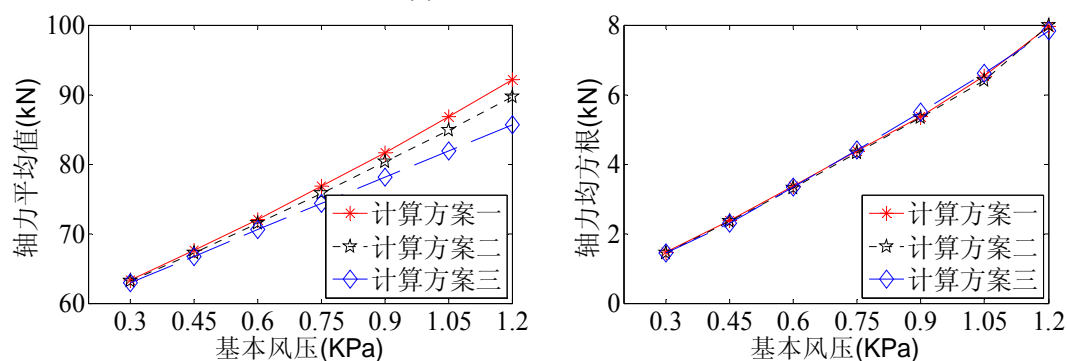
(b) 单元 59 轴力统计值



(c) 单元 203 轴力统计值



(d) 单元 2 轴力统计值



(e) 单元 391 轴力统计值

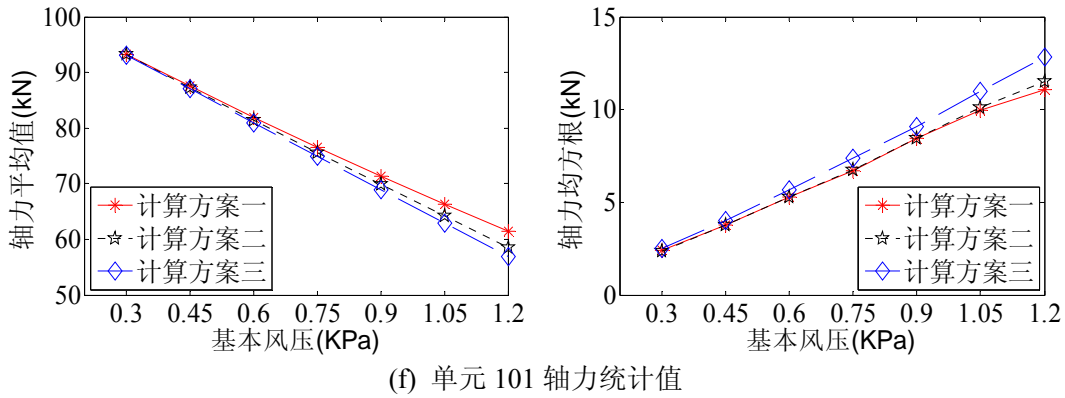
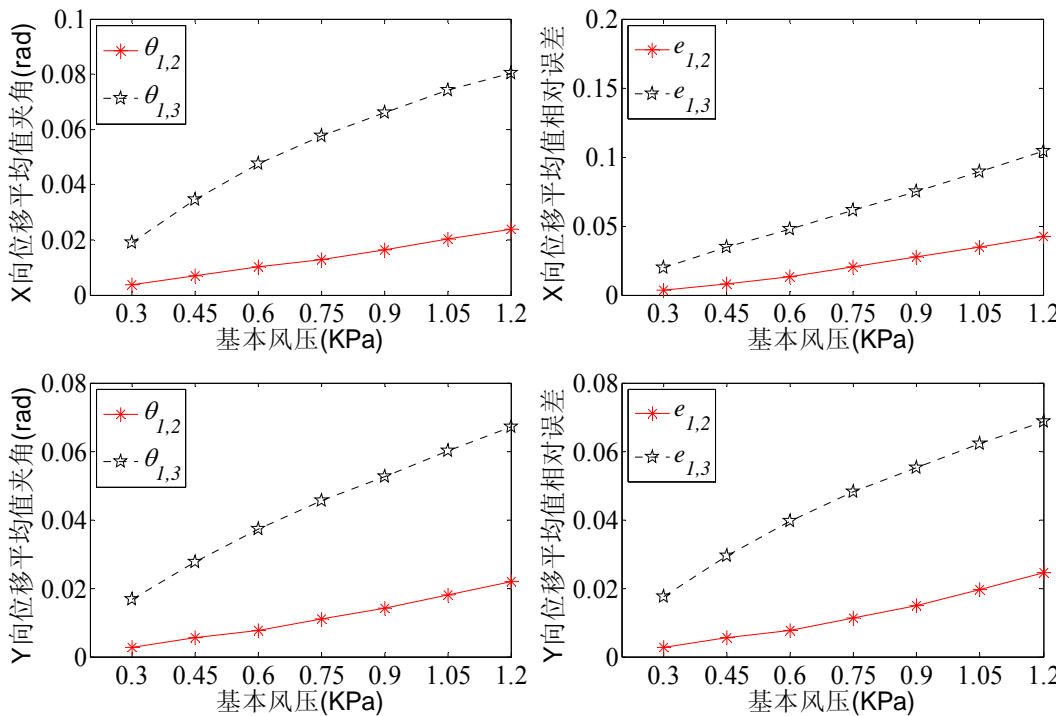


图 4.93 基本风压对单元轴力统计值的影响

由图 4.92 可知：①基本风压越大，位移越大，且均方根和均值具有相同的数量级；②虽然均值与基本风压几乎成一个线性关系，但是个别节点的均方根与基本风压之间还是存在一定的非线性关系，不过当基本风压较小时，均方根和基本风压之间几乎呈现一个线性关系。

由图4.93可知：①节点67和111处受负压，随着基本风压的增加，这些点处的稳定索和承重索分别有伸长和缩短的趋势，因而稳定索和承重索的轴力平均值分别是增加的和减小的。而节点3处受正压，随着基本风压的增加，该点处的稳定索和承重索都有伸长趋势，因而其轴力平均值都是增加的；②统计值与基本风压之间的非线性关系不是很明显，不过当基本风压较大时，二者之间还是存在些许的非线性关系。

基本风压对响应统计值的整体误差的影响见图 4.94 和图 4.95。



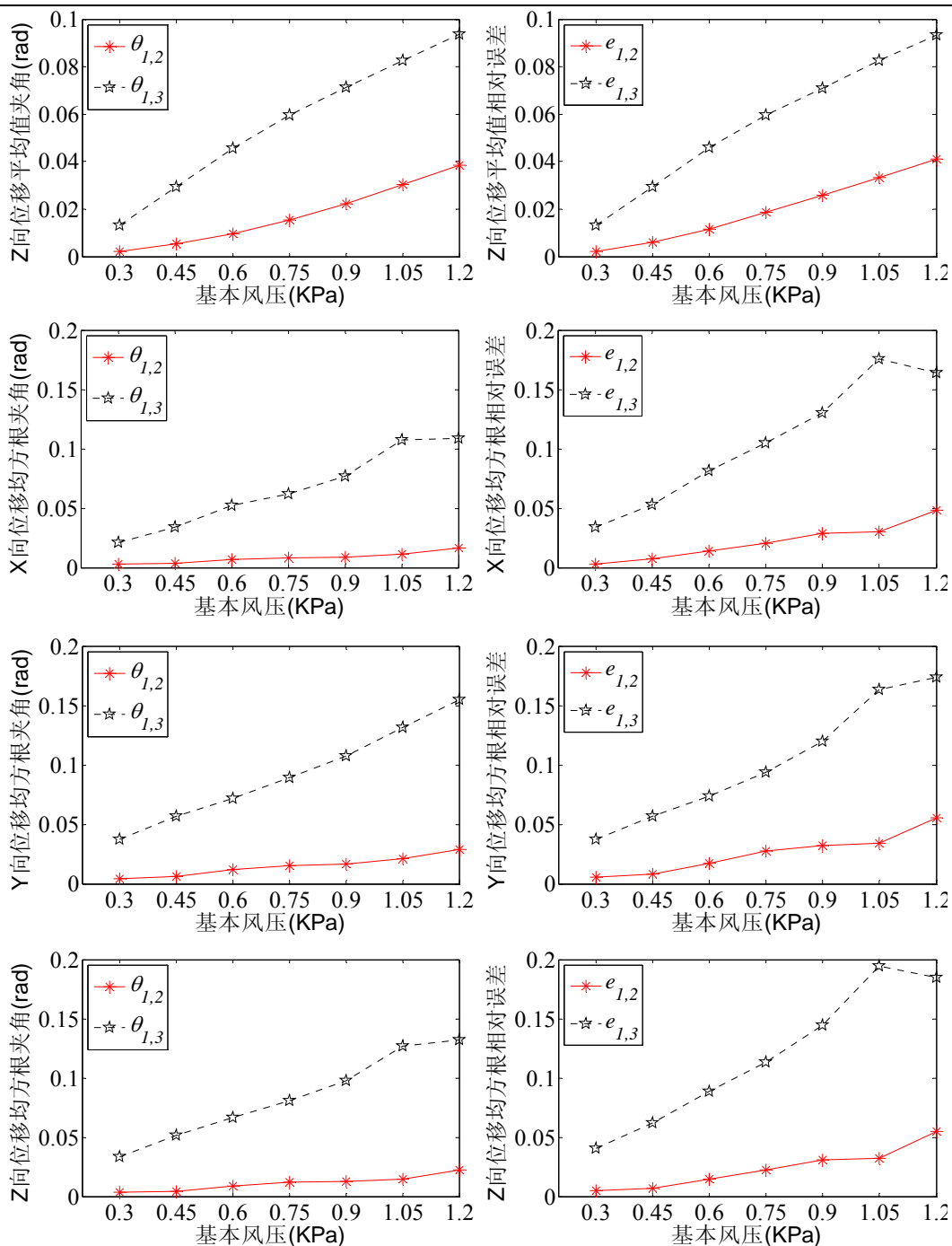
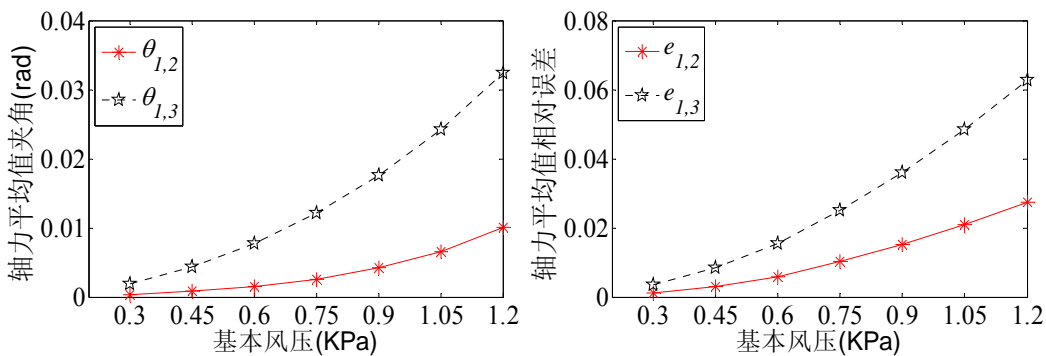


图 4.94 基本风压对节点位移统计值整体误差的影响



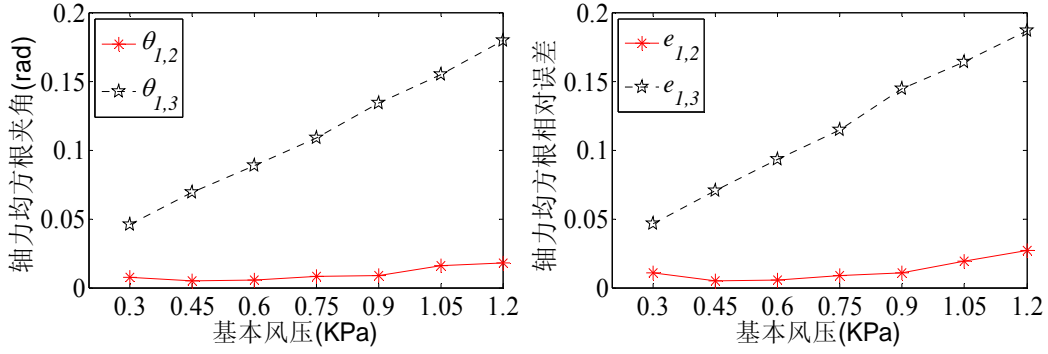
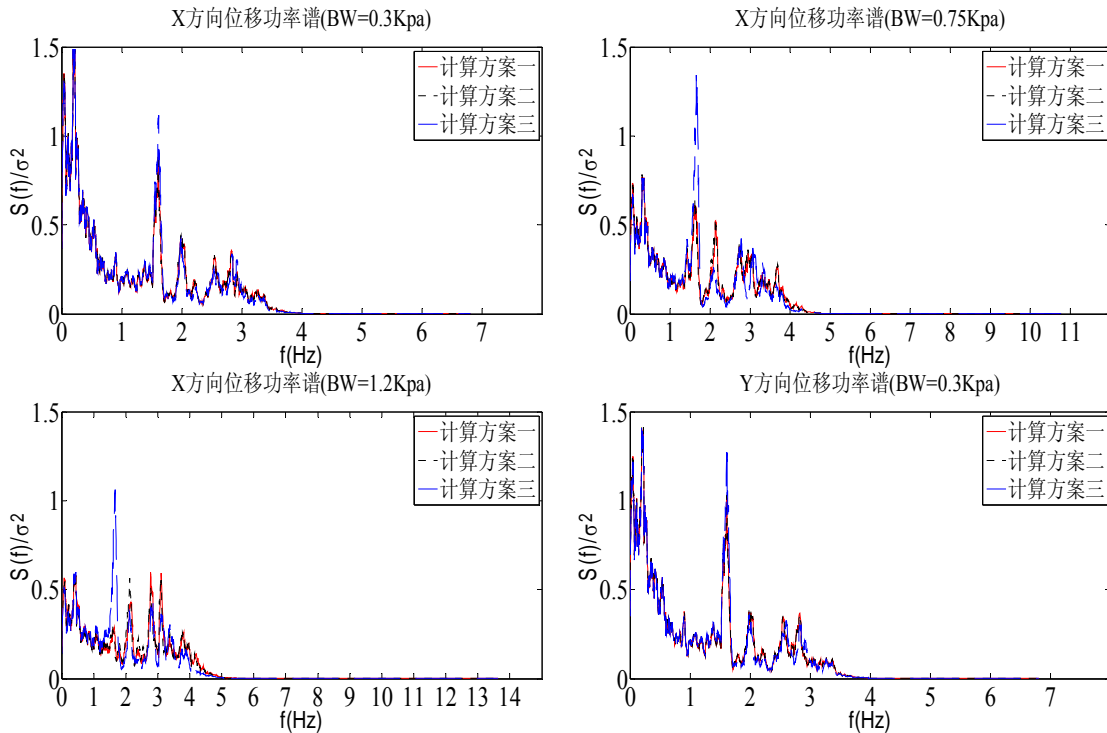


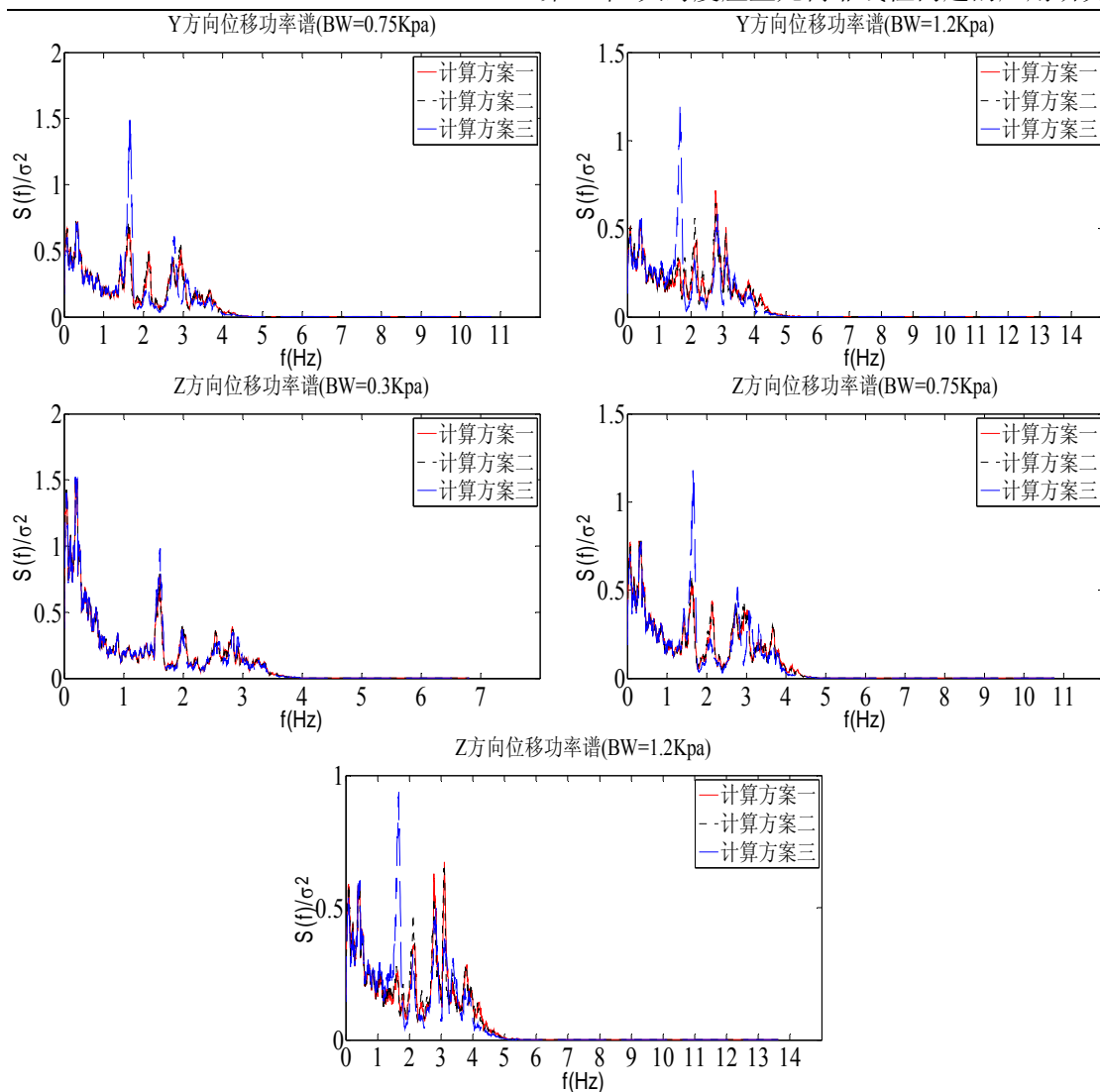
图 4.95 基本风压对单元轴力统计值整体误差的影响

由图 4.94 和图 4.95 可知：①计算方案一、二之间的整体误差  $\theta_{1,2}$  和  $e_{1,2}$  依然小于计算方案一、三之间的整体误差  $\theta_{1,3}$  和  $e_{1,3}$ ；②整体误差基本上随着基本风压的增加而增加，不过计算方案一、二之间的整体误差增长趋势远小于计算方案一、三之间的整体误差增长趋势，这说明基本风压越大，计算方案三越不适宜计算风致响应。

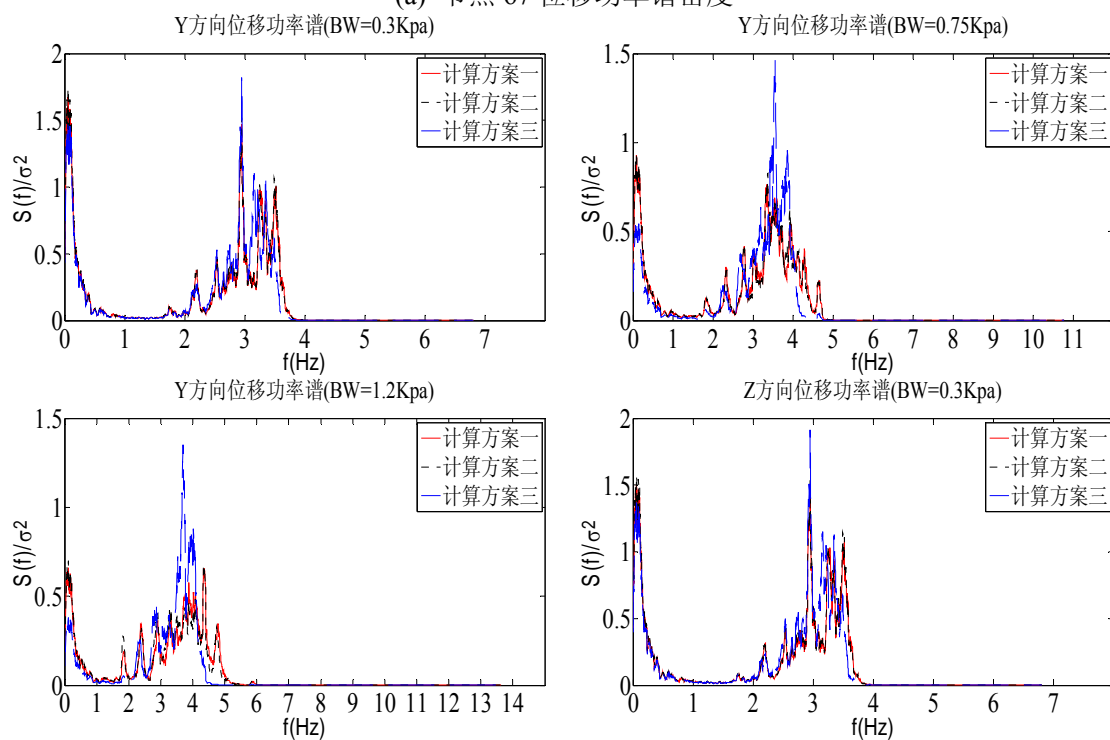
### 3) 基本风压对响应功率谱密度的影响

基本风压对节点位移和单元轴力响应功率谱密度的影响分别见图 4.96 和图 4.97。





(a) 节点 67 位移功率谱密度



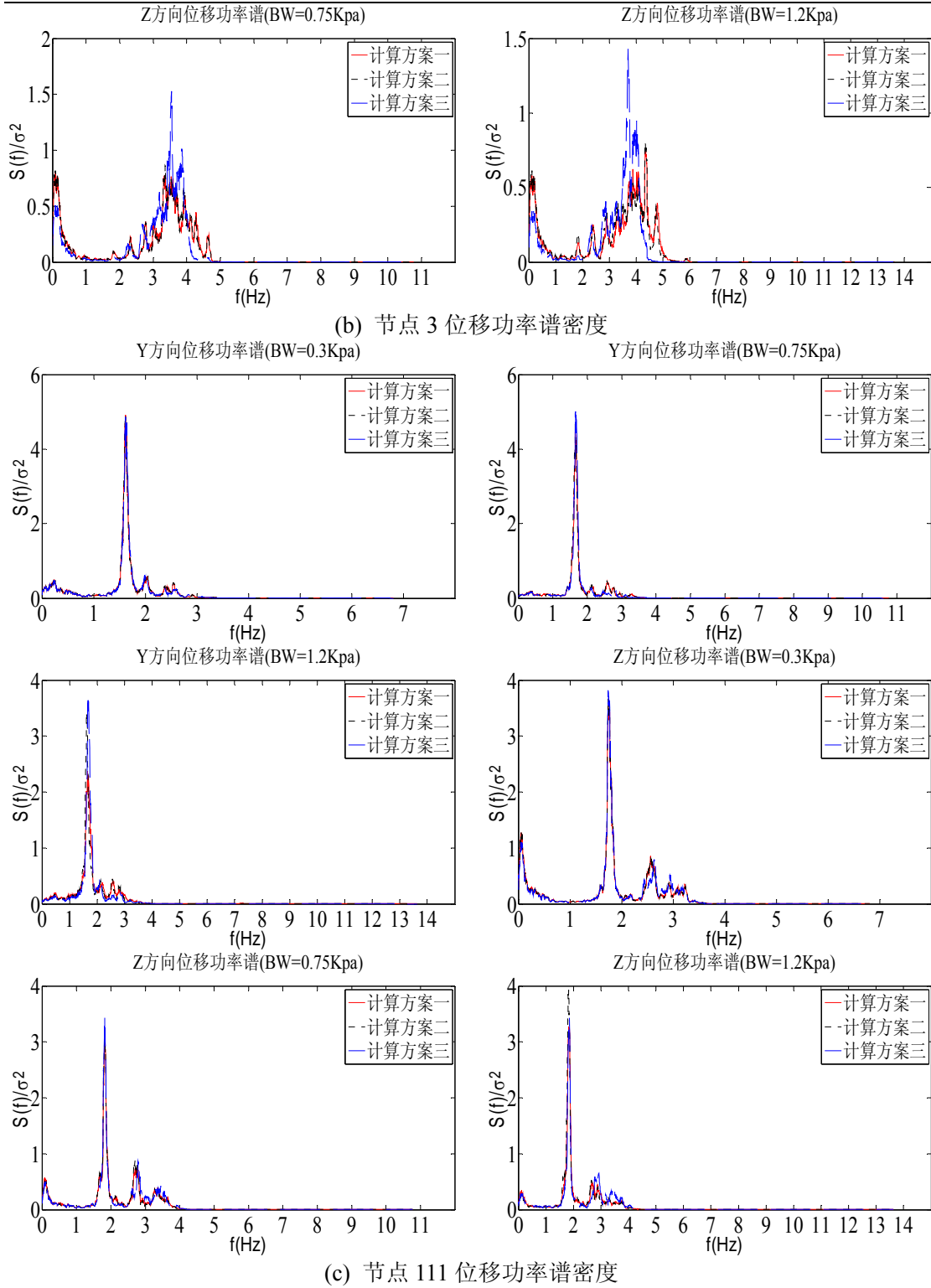
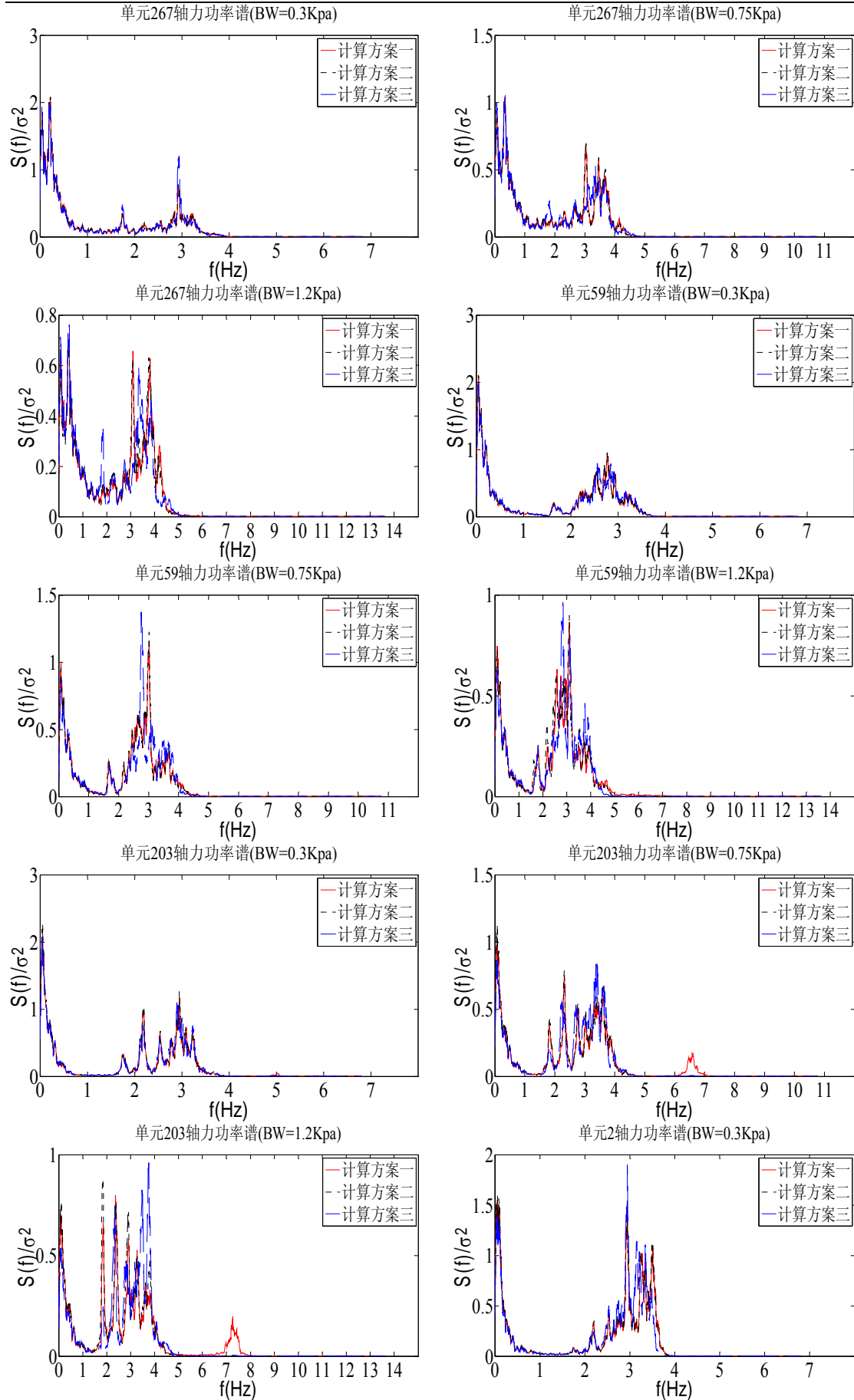


图 4.96 基本风压对节点位移功率谱密度的影响



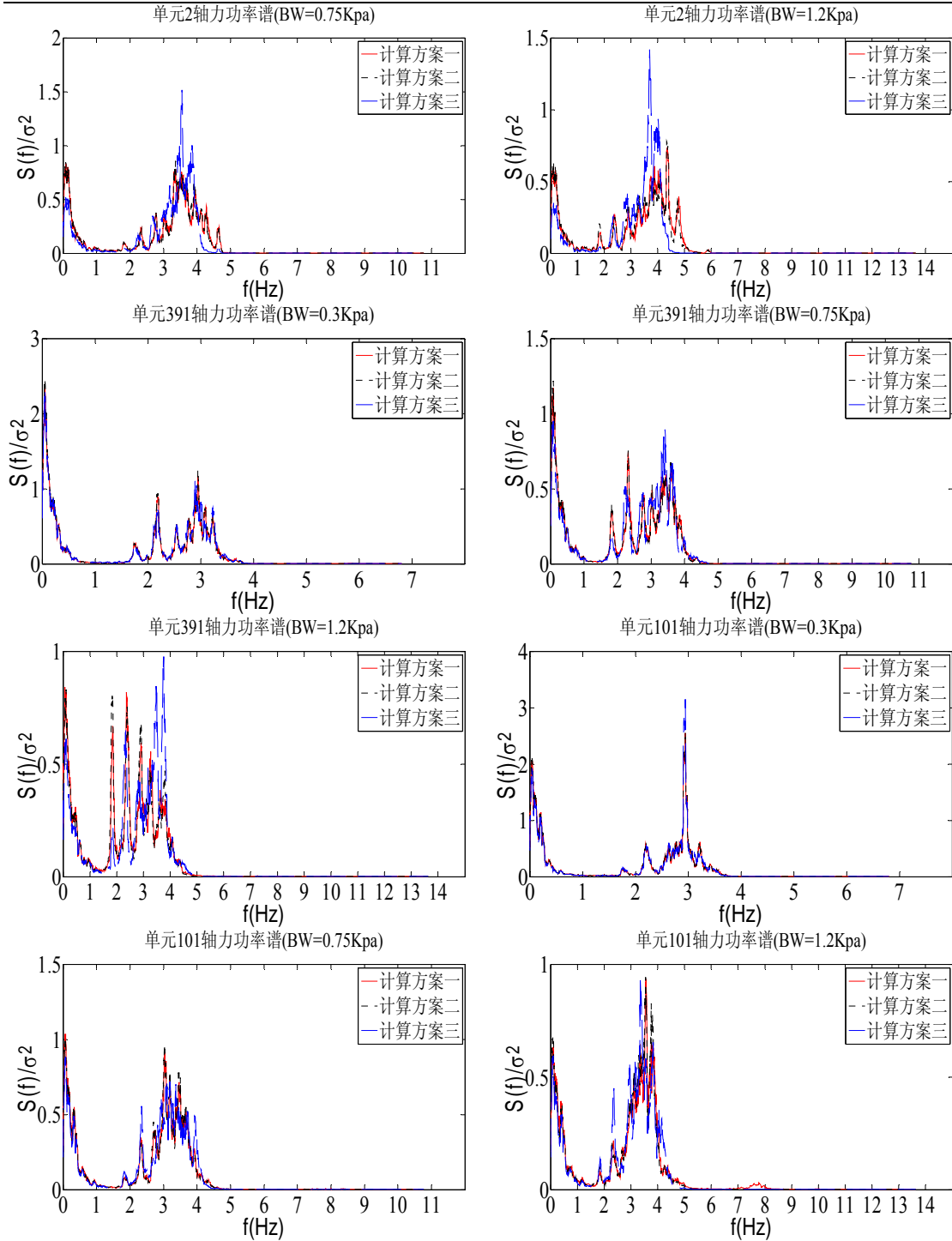


图 4.97 基本风压对单元轴力功率谱密度的影响

由图 4.96 和图 4.97 可知：①在所研究的节点和单元的响应功率谱密度中，背景分量和共振分量所占比例的特点依然同前文，不再详述；②节点 111 的共振频率几乎不随基本风压的增加而变化，文献[174]在理论计算分析时也发现风速对峰值频率也没有影响；③响应功率谱密度带宽较宽，结构的非线性振动依然是一个需要考虑多频率的宽带过程，基本风压越大，响应功率谱密度带宽频段稍宽；④在同一分布荷载情况下，不同响应的功率谱密度形状差异较大，依然体现了索



网结构非线性风致响应的复杂性。

#### 4) 基本风压对阵风响应因子的影响

基本风压对阵风响应因子的影响见图 4.98 和图 4.99。

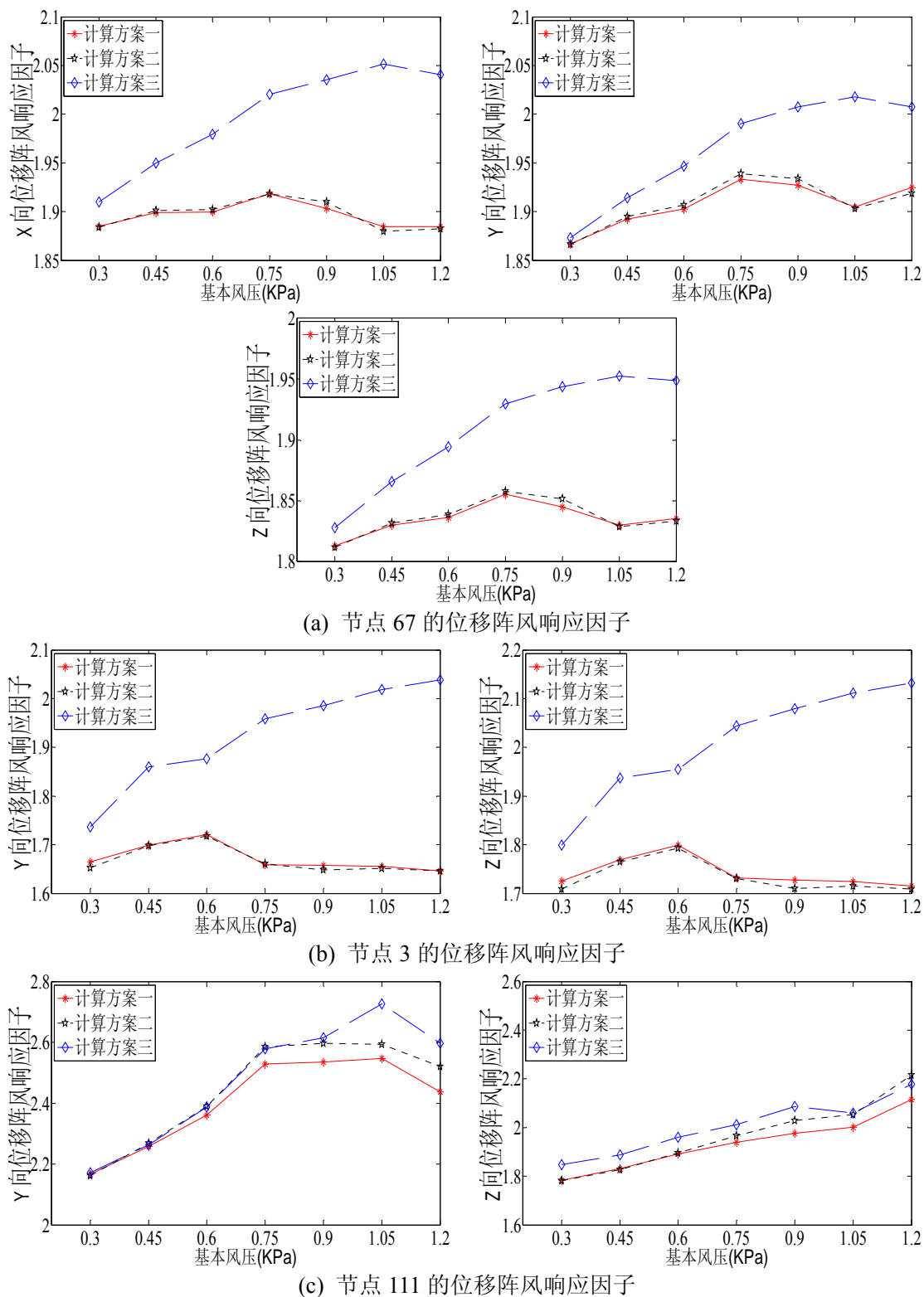


图 4.98 基本风压对节点位移阵风响应因子的影响

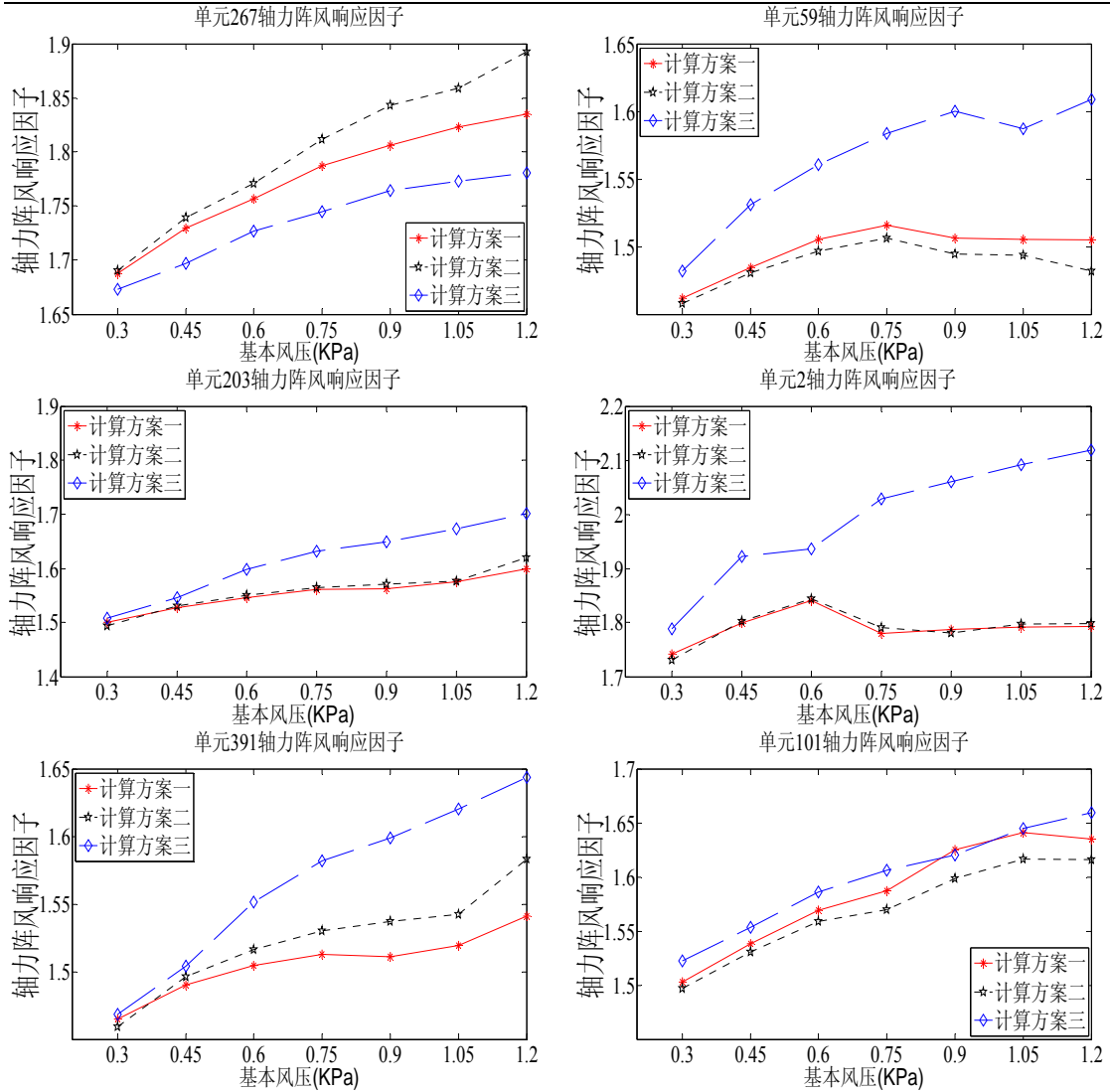


图 4.99 基本风压对单元轴力阵风响应因子的影响

由图 4.98 和图 4.99 可知：①阵风响应因子的值依然随着节点位置和单元位置的不同而不同，而且基本上也随着基本风压的变化而变化，阵风响应因子依然通常不能取为一常量；②虽然基本风压呈线性增加，但是大部分阵风响应因子总体上比较平稳，变化不大。

### 5) 三种计算方案的对比分析

前文就基本风压对响应的影响进行了较为详细的阐述，本章在此对三种计算方案的结果进行对比分析，由图 4.92~图 4.99 不难得知：

- (1) 基本风压与响应之间的非线性关系不是特别明显，不过大体上当基本风压较大时，结构大体上表现出一定的非线性特征。
- (2) 无论基本风压大小如何，计算方案一、二之间的差异总体依然较计算方案一、三之间的差异小，因此采用近似计算方案时，依然宜采用方案二考虑平均风荷载引起的非线性，尤其是在基本风压较大时。

### 4.3.3.5 风向角对自振频率、模态和响应的影响

前文在研究参数对自振频率、模态和响应的影响时，没有考虑风向角的变化影响。本小节将研究风向角单独变化时对自振频率、模态和响应的影响。不过需要首先说明的是，当仅考虑风向角变化时，不难由前文可知只有计算方案二的自振频率和模态受风向角变化的影响，本小节只对此进行研究。但是在对比分析频率时(见图 4.101)，依然给出计算方案一、三中的自振频率。相关的计算参数为：初始预拉力  $T_0 = 80kN$ ，索断面面积为  $A = 355.98mm^2$ ，屋盖分布荷载为  $FD = 600N/m^2$ ，风向角为  $WD = 0, 15, 30, 45, 60, 75, 90$ 度。基本风压、基本风速、屋盖高点风速、时间步长和原型/模型的风速相似比见前文。

#### 1、风向角对计算方案二中自振频率的影响

在计算方案二中，风向角对时程计算时初始位形的自振频率的影响见图 4.100。

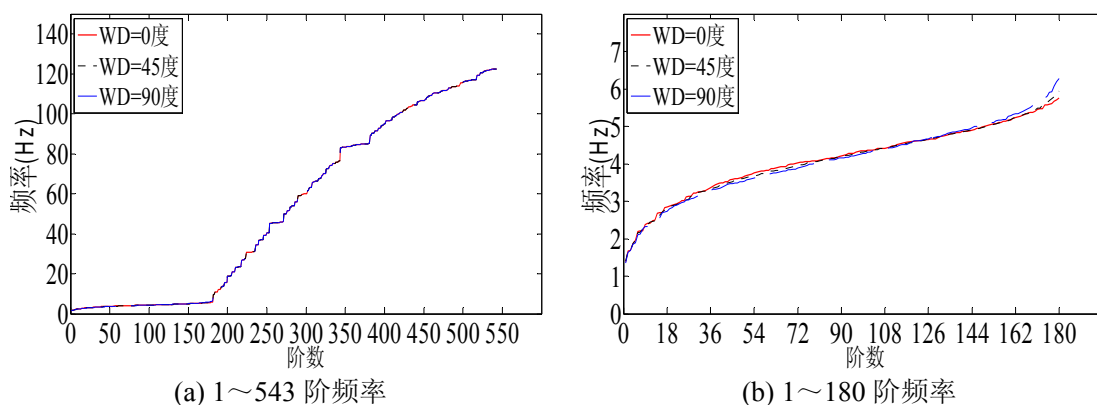


图 4.100 计算方案二中风向角对自振频率的影响

由图 4.100 可知：风向角的大小对自振频率几乎没有影响，结构频率同样大致在第 181 阶后产生较为明显的增长。结构低频段的频率依然呈密集的、连续性的分布，在进行动力时程分析时同样需要考虑多个低阶频率对 Rayleigh 阻尼矩阵的影响，本小节在用式(3.75)计算  $a_0$  和  $a_1$  时，依然考虑了结构前 180 阶频率的影响(包括计算方案一和计算方案三)。 $\omega_i$  和  $\omega_j$  的取法同本章前文。

本章在此也同样分析在相同风向角情况下、不同计算方案之间的 1~180 阶频率之间的差异(笔者注：风向角对计算方案一、三中的自振频率没有影响，如此叙述主要是行文方便)，见图 4.101。

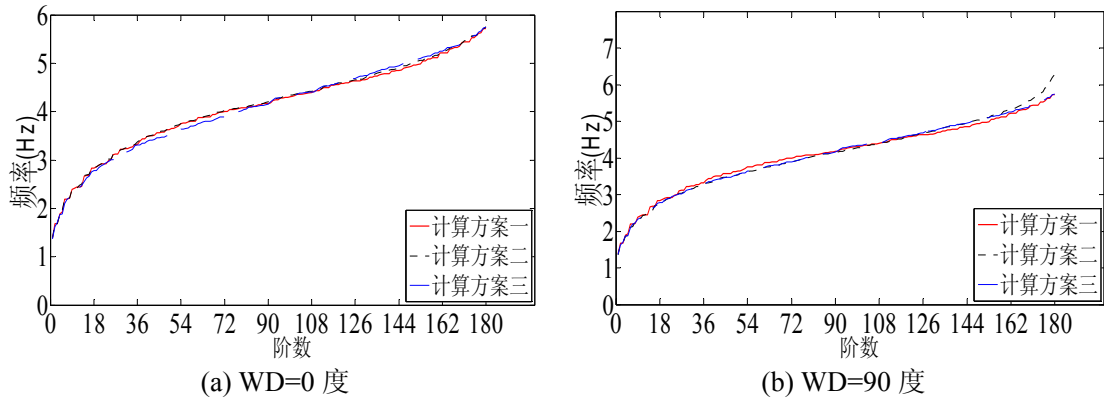
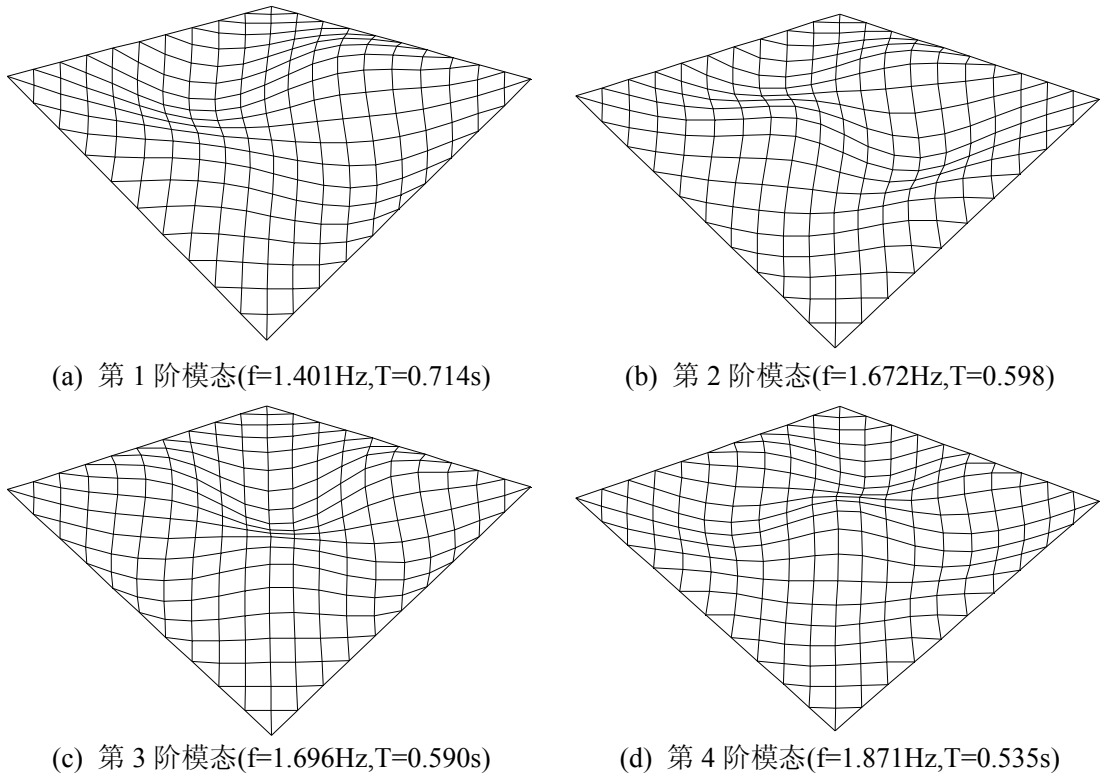


图 4.101 相同风向角情况下、不同计算方案之间的低频段之间的差异

由图 4.101 可知，风向角对不同计算方案中的低频段的频率影响依然很小。

## 2、风向角对计算方案二中结构模态的影响

在计算方案二中，0 度风向角对时程计算时初始位形的结构模态的影响见图 4.87，而 45 度和 90 度风向角对时程计算时初始位形的结构模态的影响分别见图 4.102 和图 4.103。



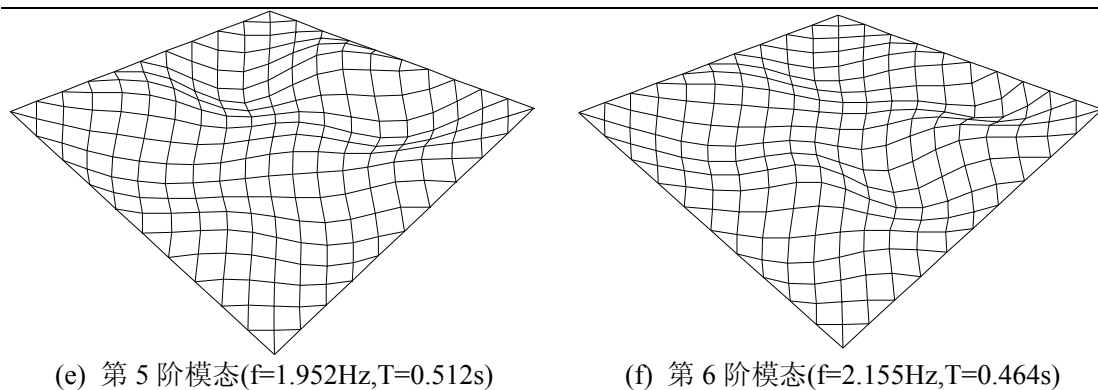


图 4.102 计算方案二中风向角  $WD=45$  度时的部分结构模态

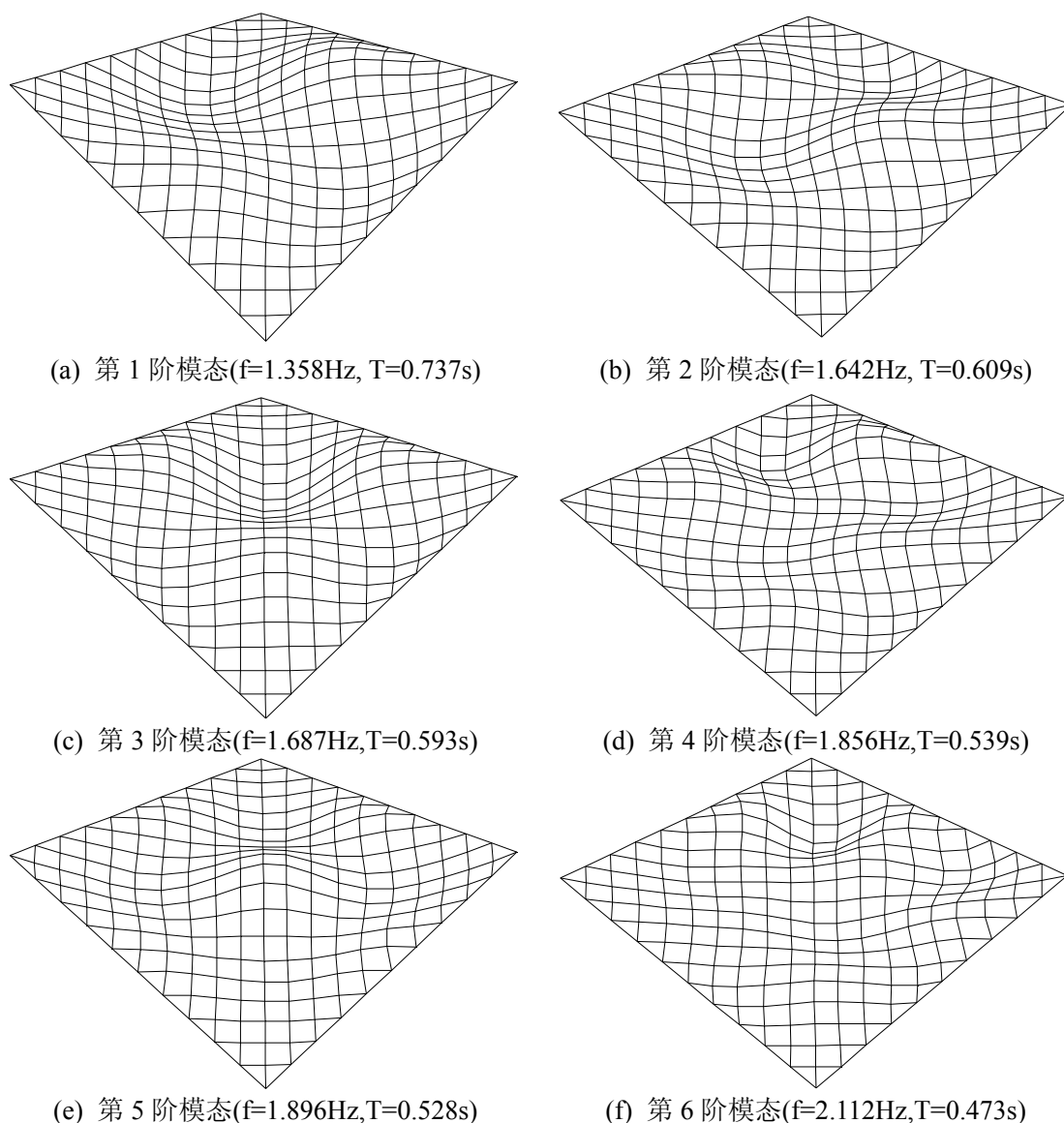


图 4.103 计算方案二中风向角  $WD=90$  度时的部分结构模态

由图 4.87、图 4.102 和图 4.103 可知：①多数情况下，结构前若干阶模态仍然为单轴或双轴反对称形式，结构的第 1 阶模态依然为双轴反对称形式；②各阶

模态在两个方向上依然均为多波曲线，整个曲面变化复杂，阶数越高，模态形状越复杂；③风向角不同，同阶模态形状的也存在一定的差异。

### 3、风向角对响应的影响

本小节将分析风向角对响应统计值、响应功率谱密度和阵风响应因子的影响，对比分析三种计算方案的差异。

#### 1) 风向角对结构变形的影响

由前文分析不难得知，0 度风向角下的风压系数和结构变形是一致的，因此本章在此不再分析 0 度风向角对结构变形的影响。限于篇幅，本章在此再以 90 度风向角为例来研究风向角对结构变形的影响，即研究风压系数和结构变形之间的一致性，首先给出 90 度风向角下的风压系数分布图，见图 4.104。

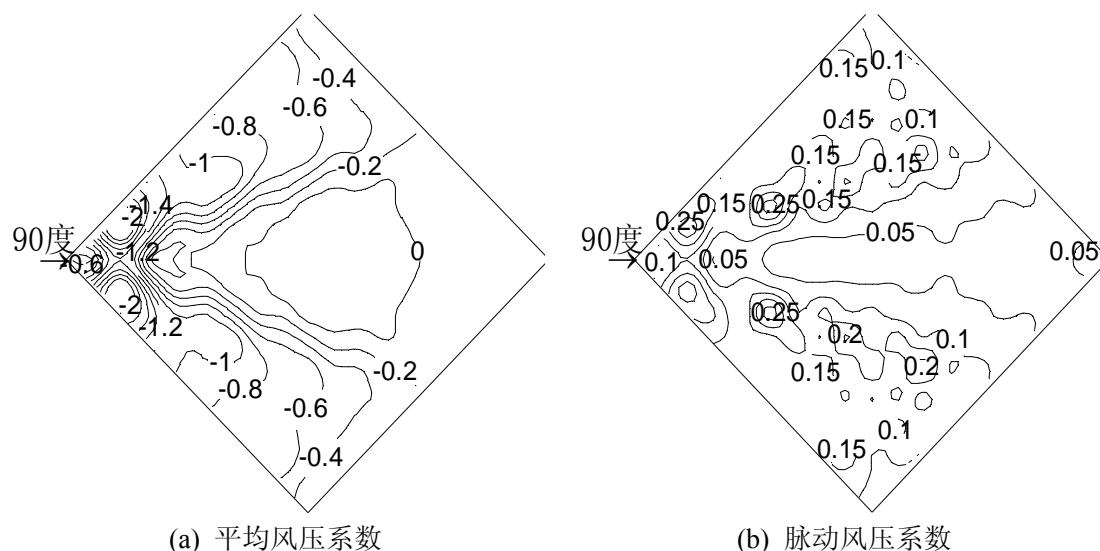


图 4.104 风压系数分布图(90 度风向角)

由图 4.104 可知[33]：①在 90 度风向角时，风从结构高点吹来，在鞍形高点到低点靠近边缘区域分别形成两个锥形涡，旋涡区域风吸力很大，由于结构表面曲率的变化以及流动分离的影响使得风吸力最大值出现在迎风鞍形高点区域。在下风区域由于旋涡作用强度减小，能量减小，导致风吸力减小；②风向角为 90 度时，风压系数关于 X 轴对称，由于再附的原因，平均风压系数在结构的中部形成一块正压区；③平均风压系数等压线的分布仍然成阶梯状；④在迎风区域，脉动性相对较强，而在下风区域，由于脉动能量的衰减，脉动风压系数逐渐减弱。

三种计算方案中 90 度风向角下的结构变形见图 4.105～图 4.107。

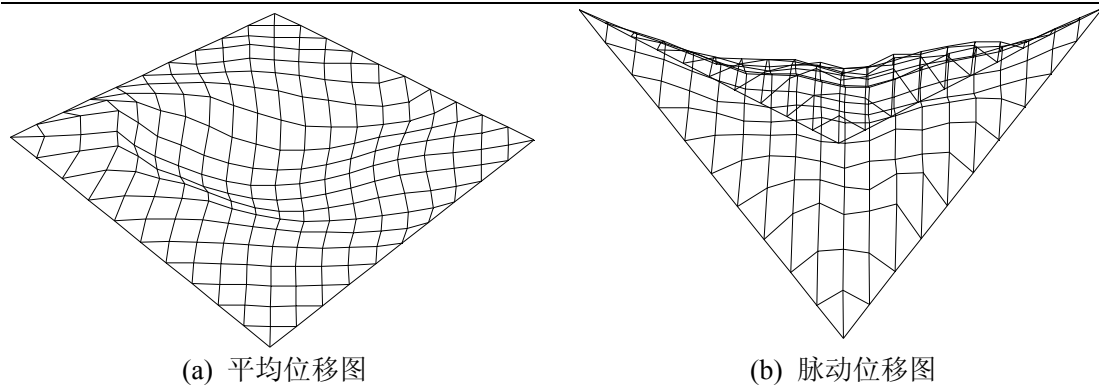


图 4.105 计算方案一中 90 度风向角时的结构变形

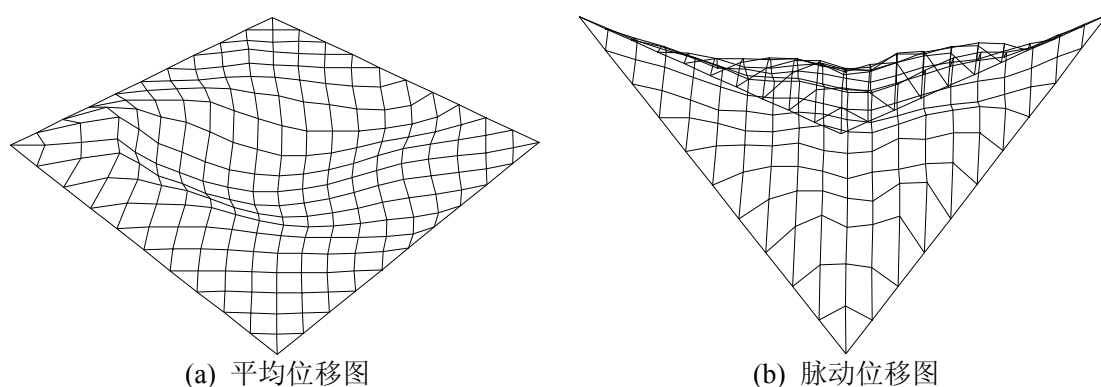


图 4.106 计算方案二中 90 度风向角时的结构变形

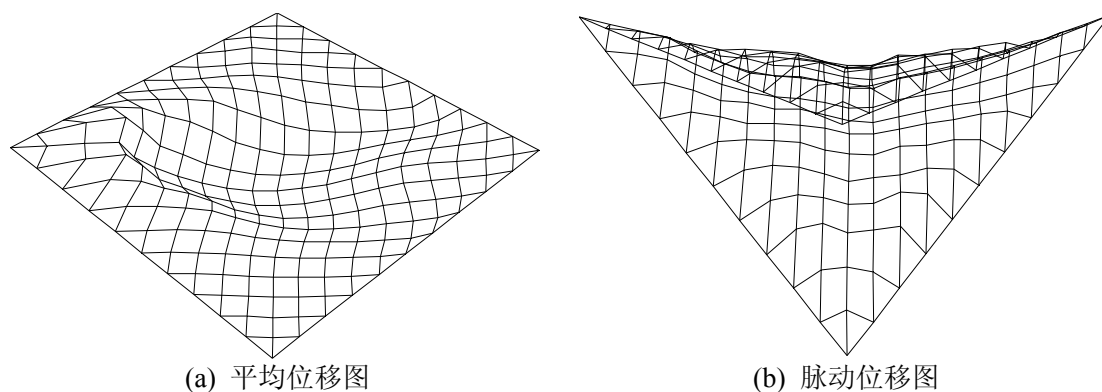


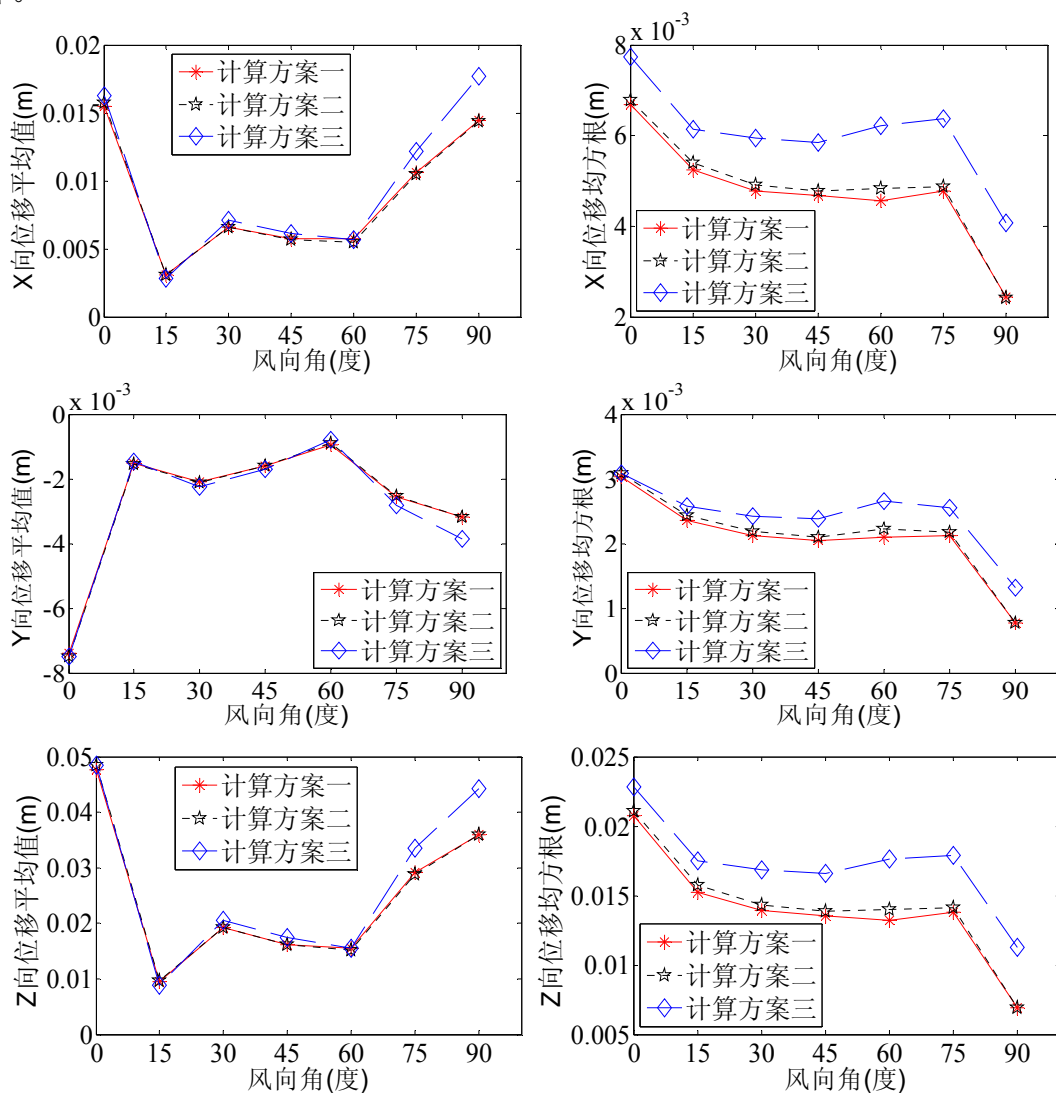
图 4.107 计算方案三中 90 度风向角时的结构变形

图 4.105~图 4.107 可知，结构变形与风压系数的分布基本上是吻合的：①风荷载关于 X 轴对称，结构变形也关于 X 轴对称；②风荷载的方向和大小与结构位移的方向和大小基本上是一致的，在负压(见图 4.104)较大的地方，沿结构上表面外法线方向的位移也较大，而在正压区域，结构位移有沿着正压方向运动的趋势，此外在脉动风压较大的地方，脉动位移也基本上比较大。

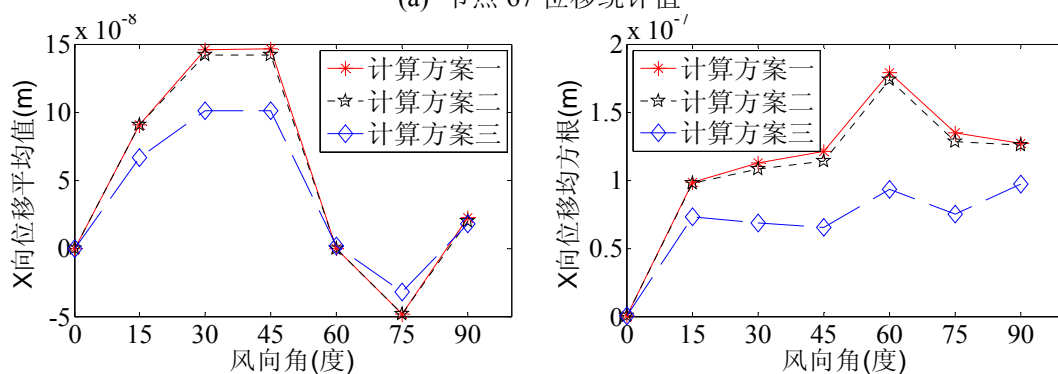
## 2) 风向角对响应统计值的影响

风向角对所选节点和单元的响应统计值的影响见图 4.108~图 4.111。需要说

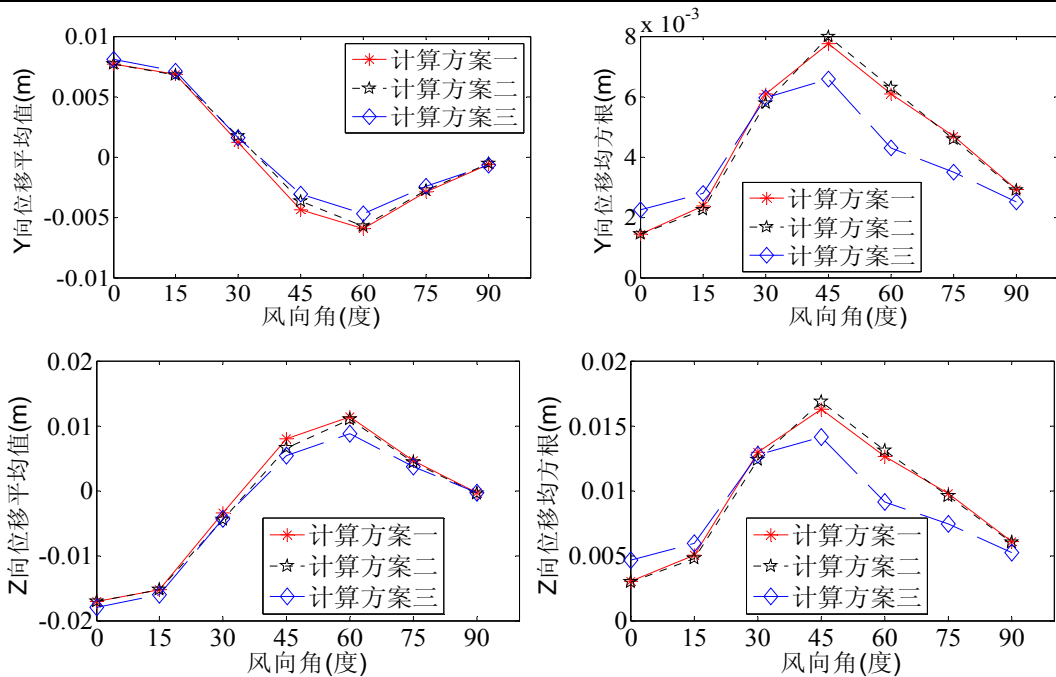
明的是, 因为风向角发生变化, 不能研究响应的几何非线性特征, 因此本章在此只能研究三种计算方案的统计值(包括下文的功率谱密度)在不同风向角下的差异。



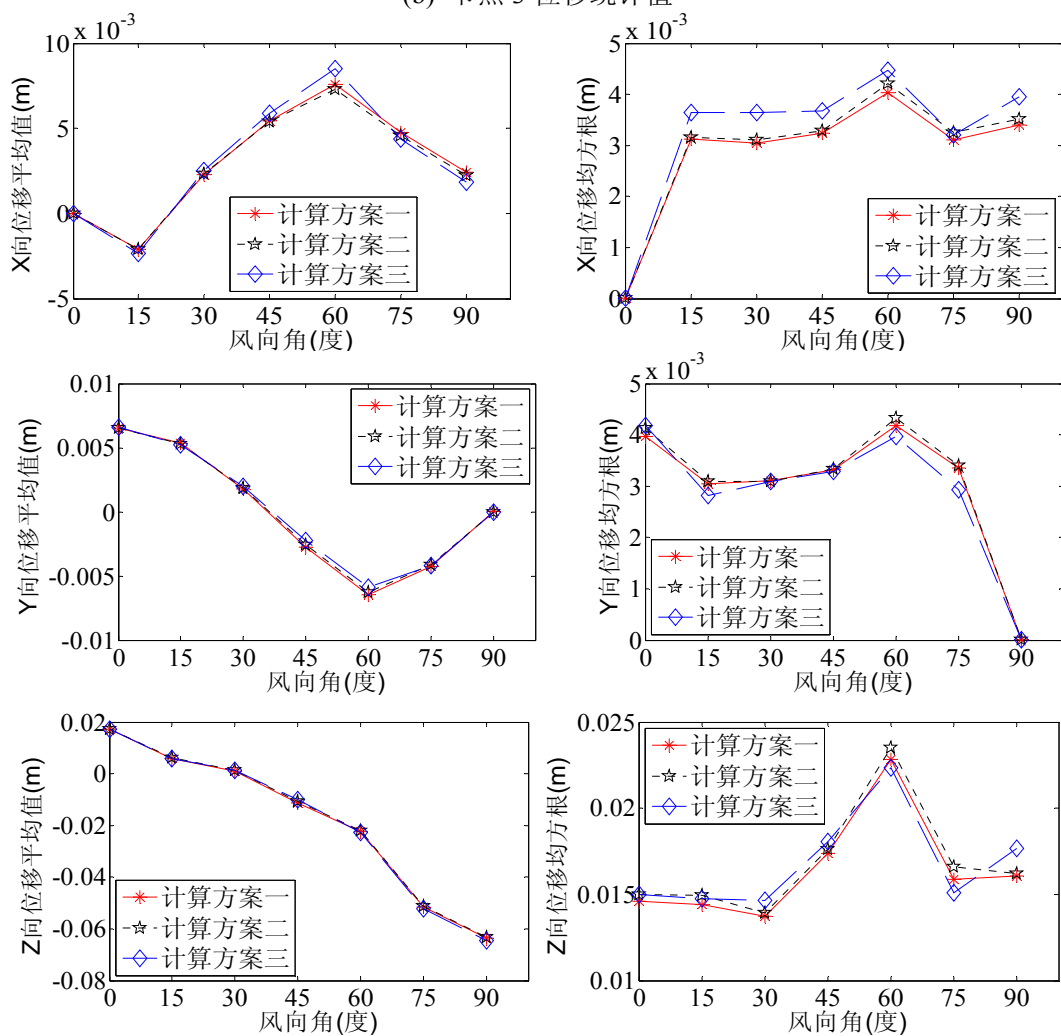
(a) 节点 67 位移统计值





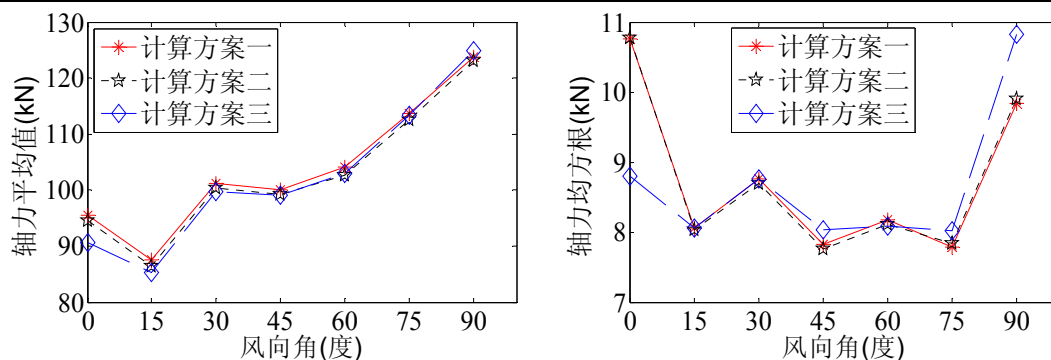


(b) 节点3位移统计值

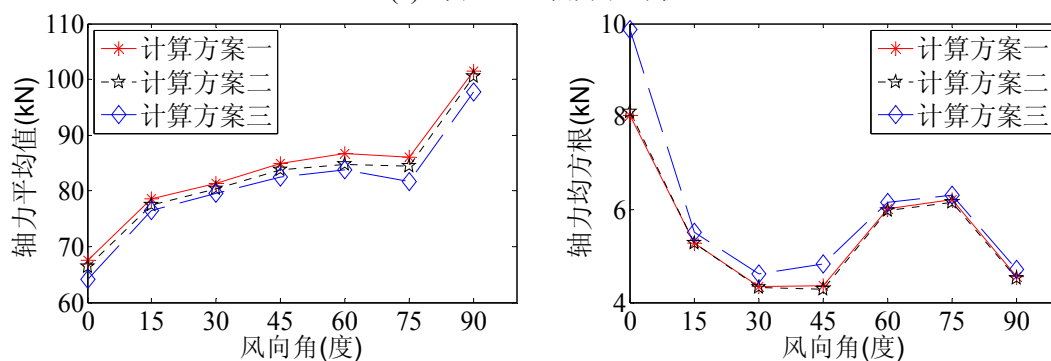


(c) 节点111位移统计值

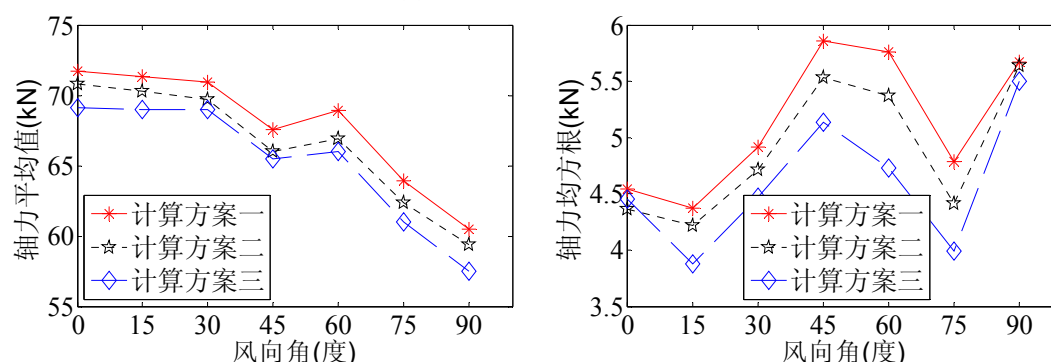
图 4.108 风向角对节点位移统计值的影响



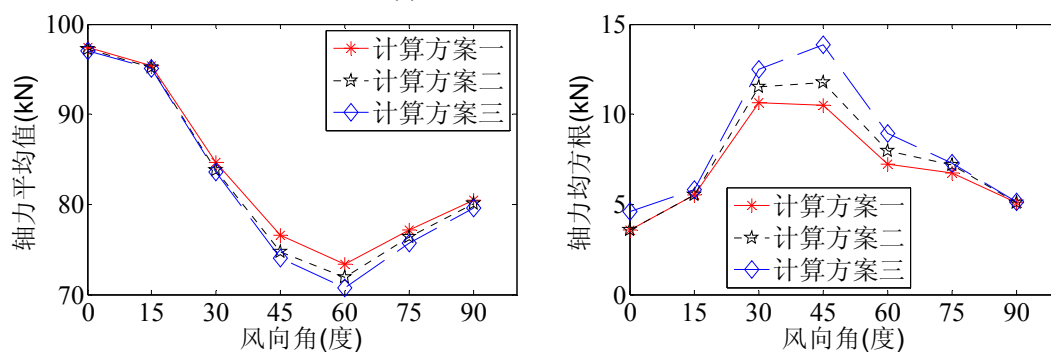
(a) 单元 267 轴力统计值



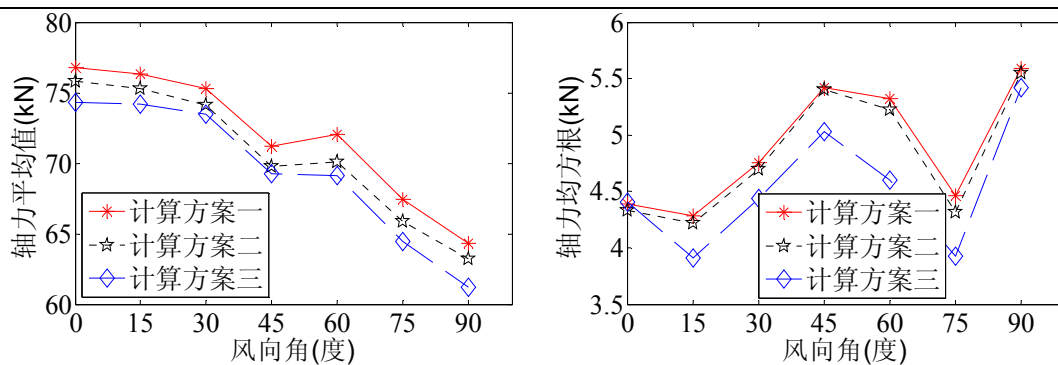
(b) 单元 59 轴力统计值



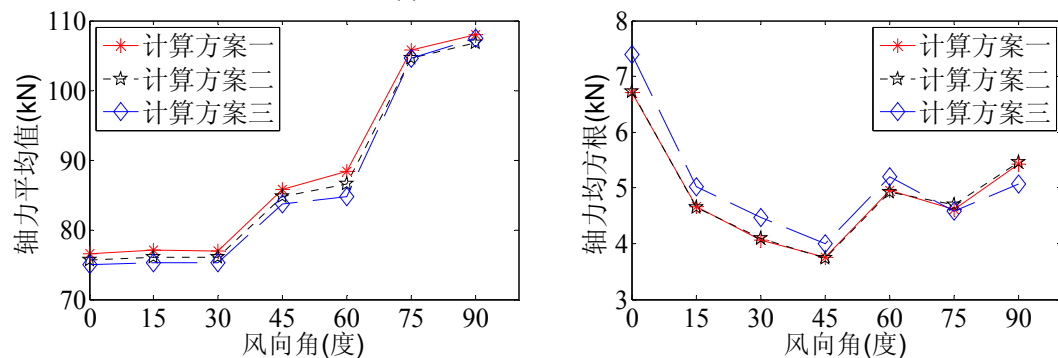
(c) 单元 203 轴力统计值



(d) 单元 2 轴力统计值

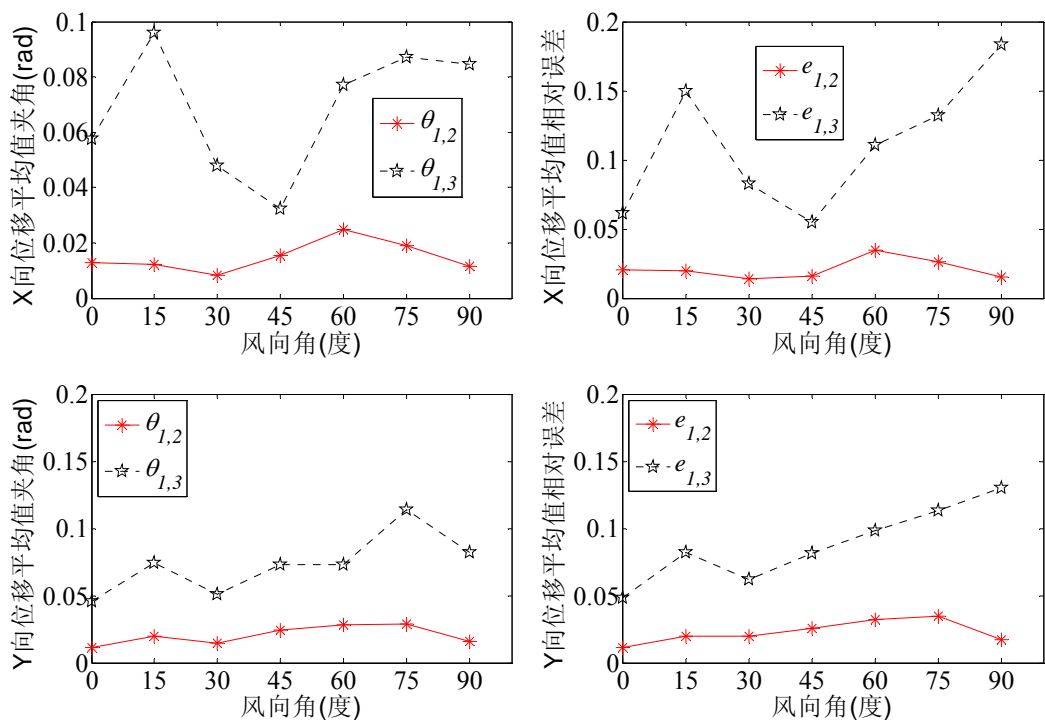


(e) 单元 391 轴力统计值



(f) 单元 101 轴力统计值

图 4.109 风向角对单元轴力统计值的影响



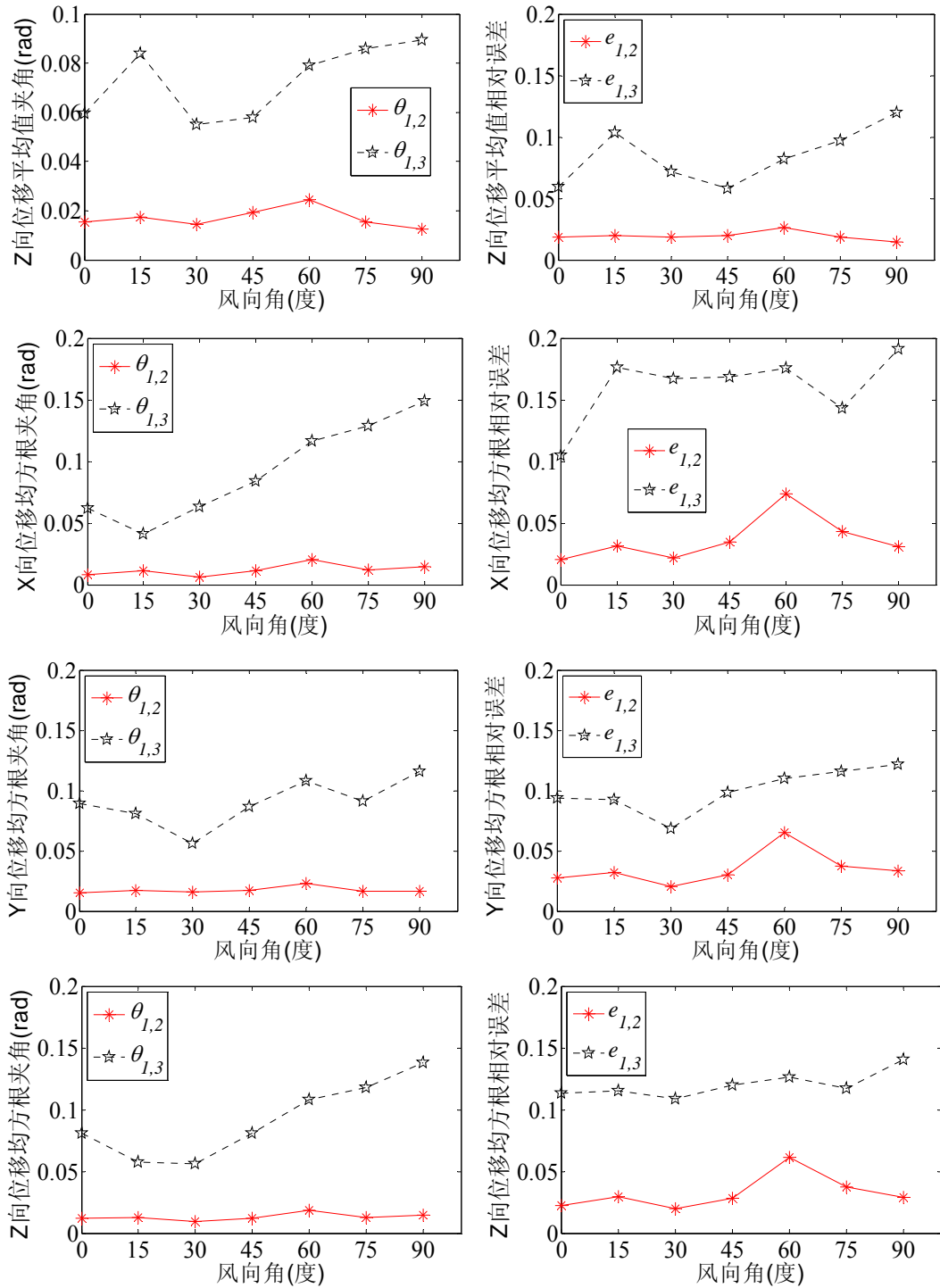


图 4.110 风向角对节点位移统计值整体误差的影响

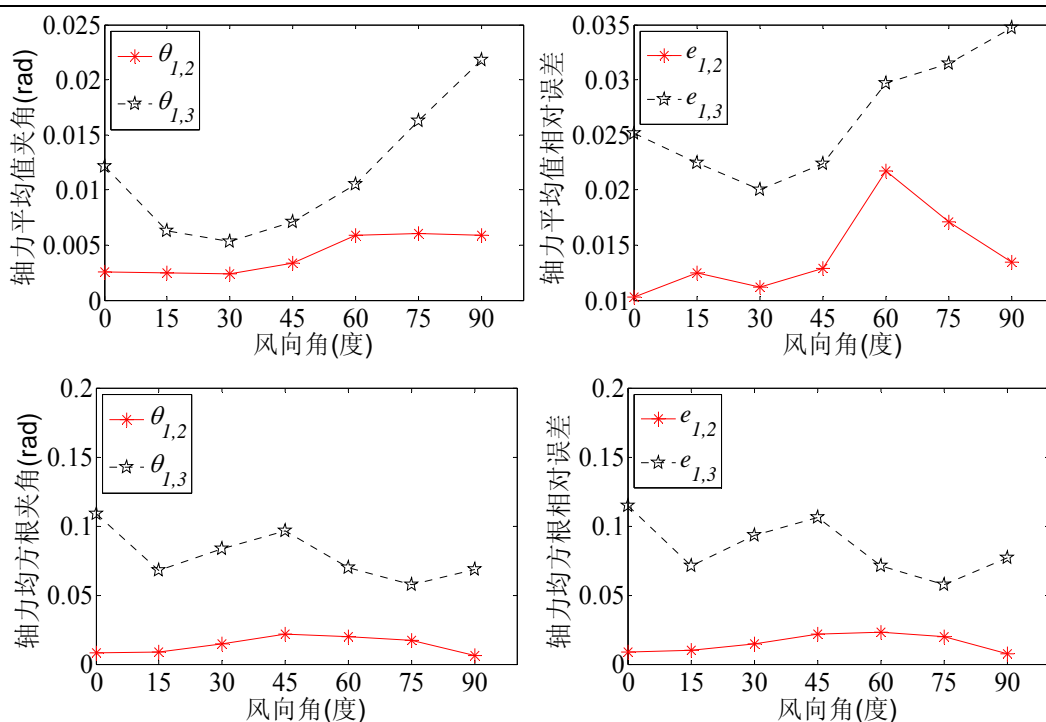
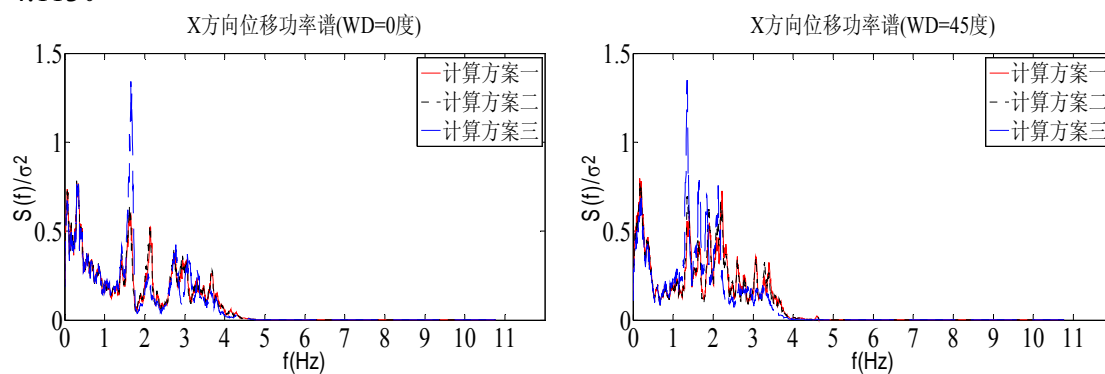


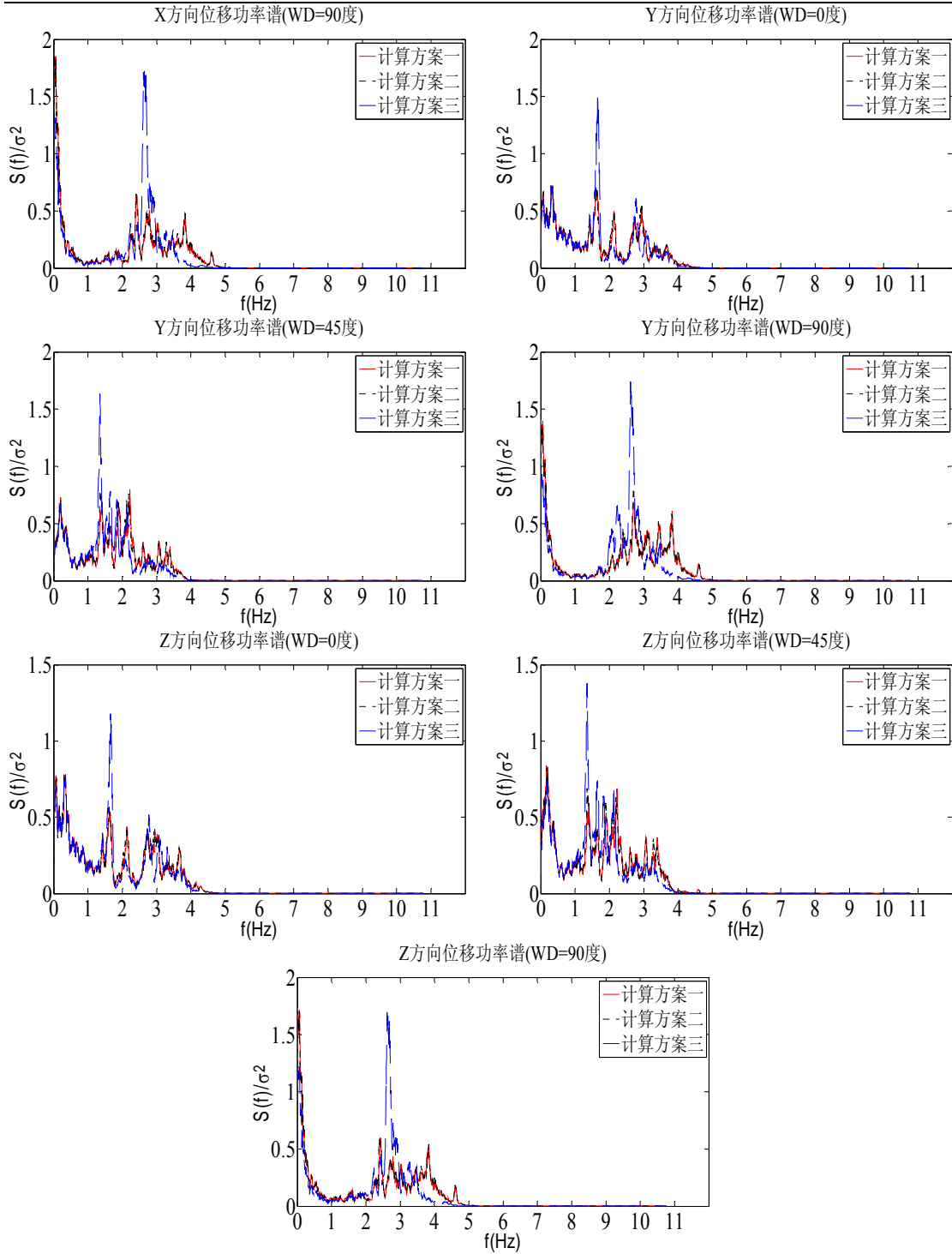
图 4.111 风向角对单元轴力统计值整体误差的影响

由图 4.108~图 4.111 可知, 在不同风向角下, 计算方案一、二之间的差异均较计算方案一、三之间的差异小, 而且计算方案一、二之间的整体误差均较计算方案一、三之间的整体误差平稳。

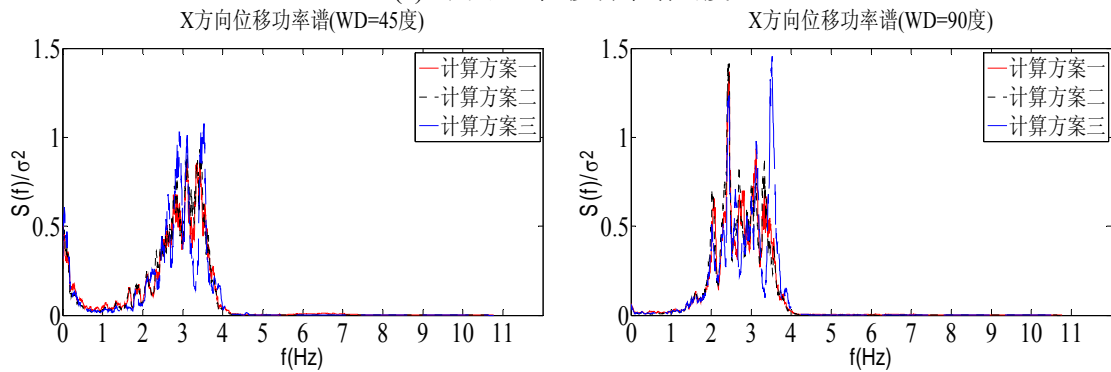
### 3) 风向角对响应功率谱密度的影响

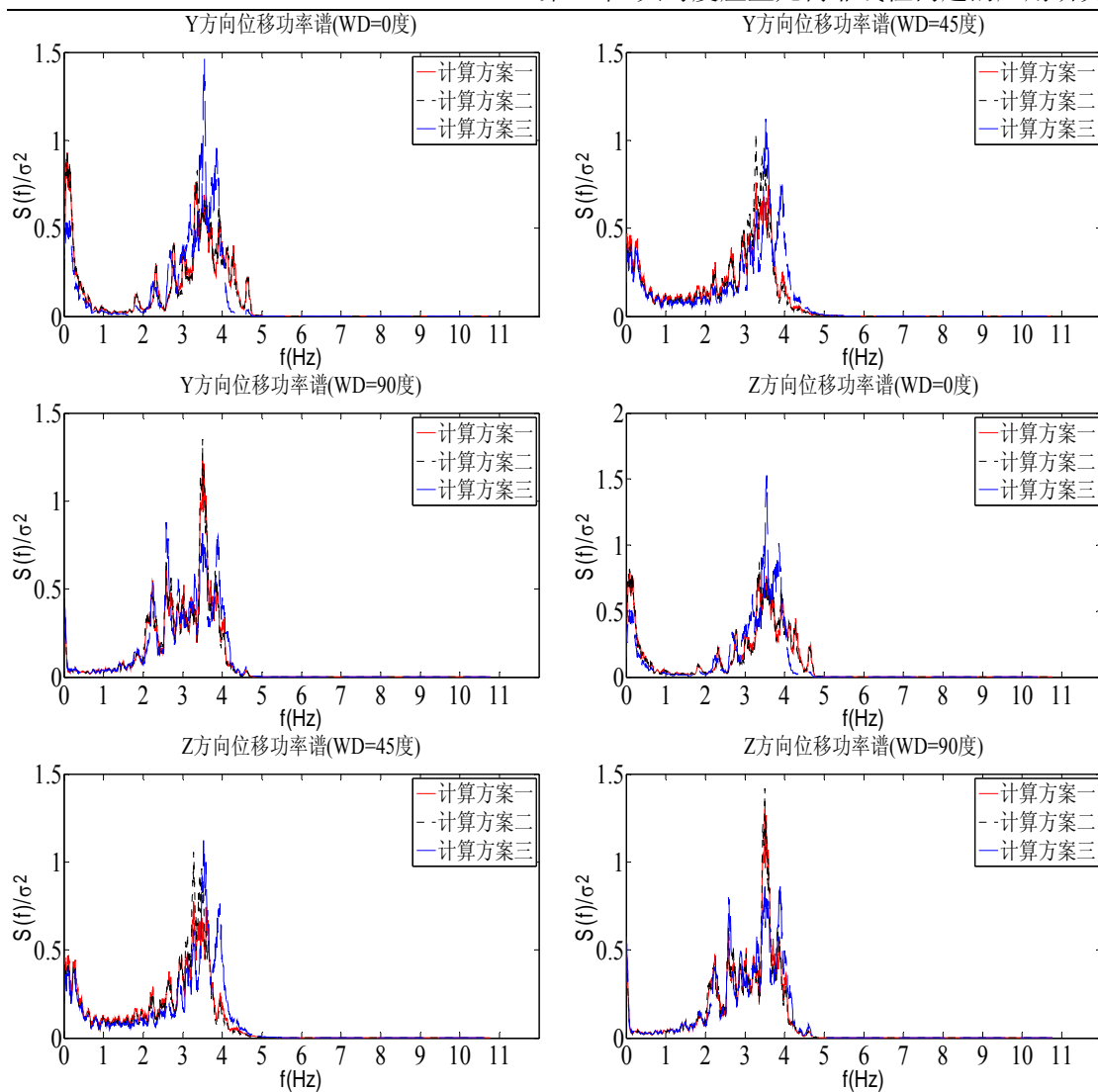
风向角对节点位移和单元轴力响应功率谱密度的影响分别见图 4.112 和图 4.113。



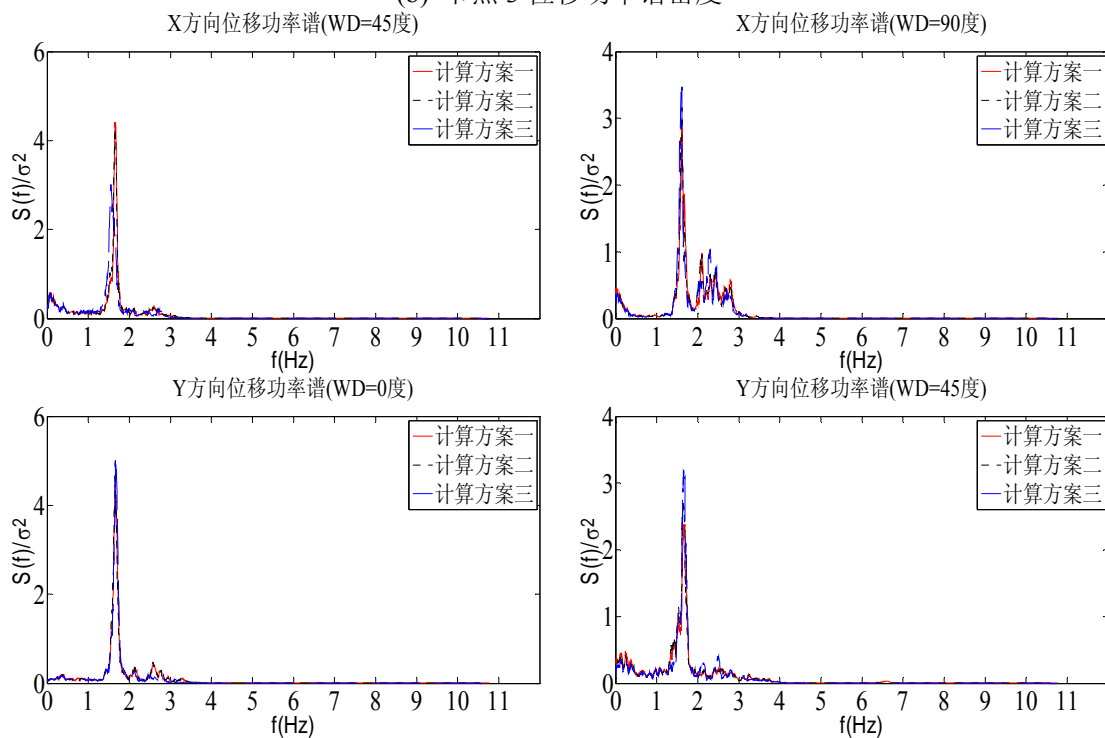


(a) 节点 67 位移功率谱密度





(b) 节点3 位移功率谱密度



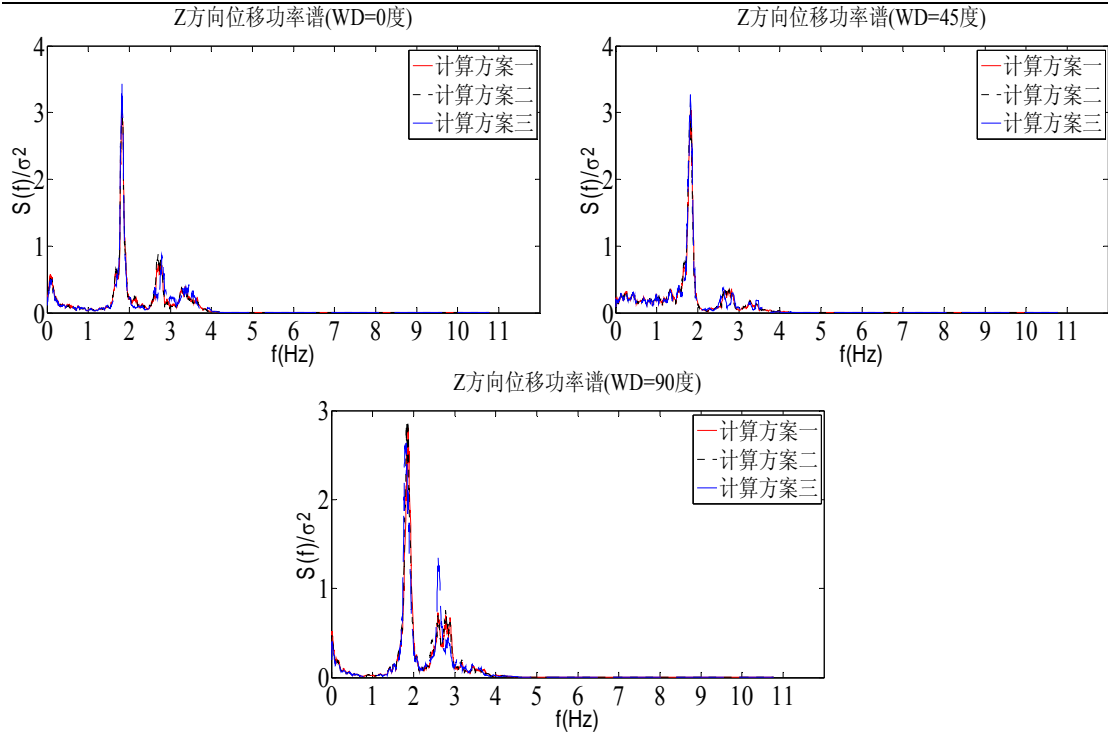
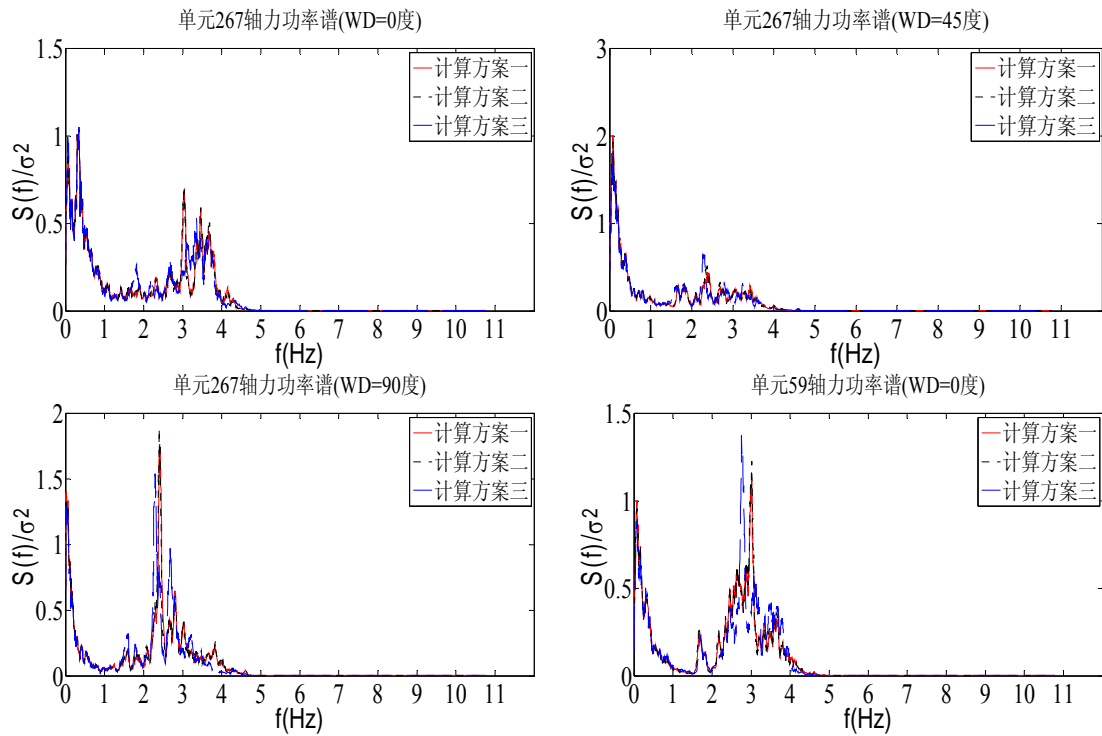
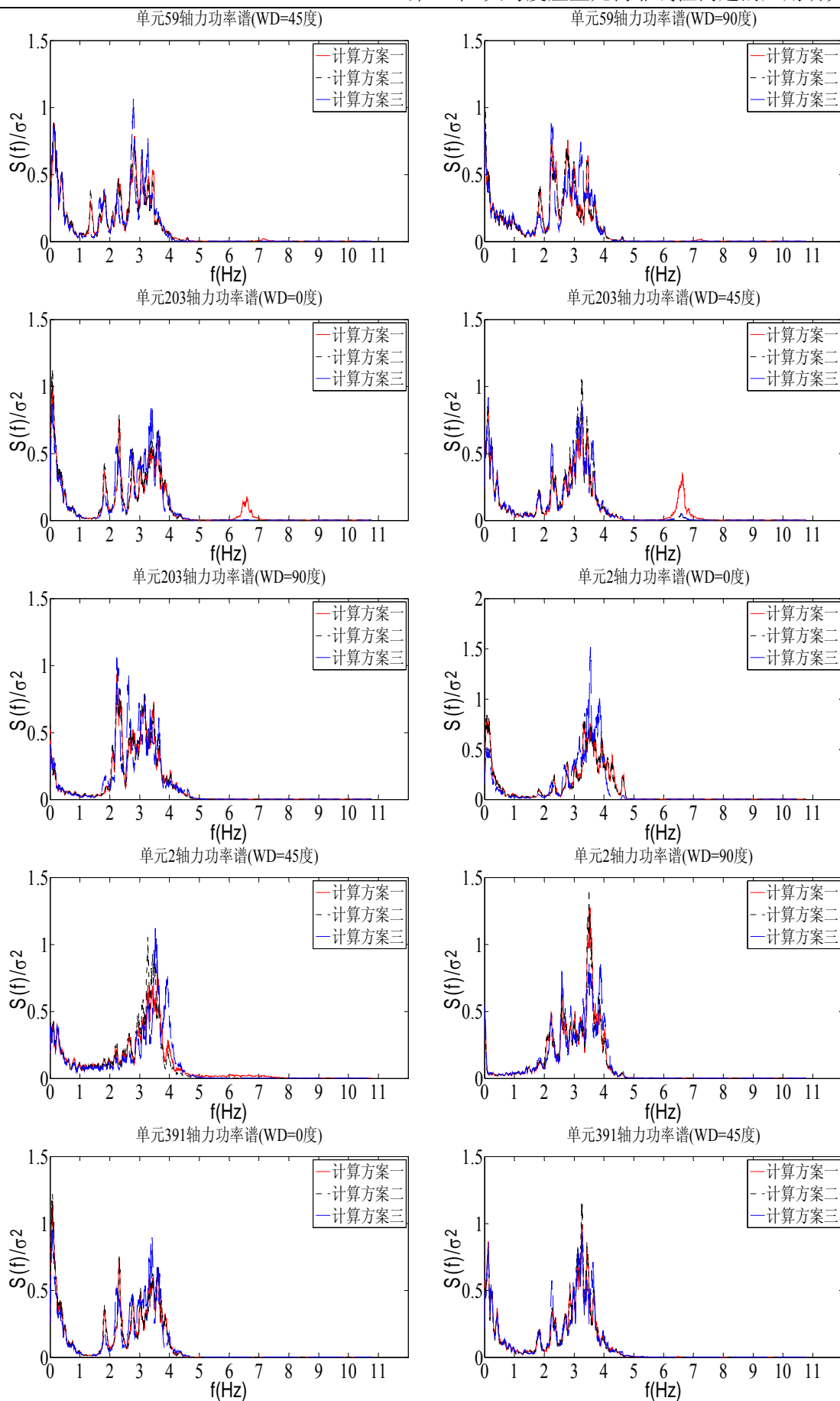


图 4.112 风向角对节点位移功率谱密度的影响







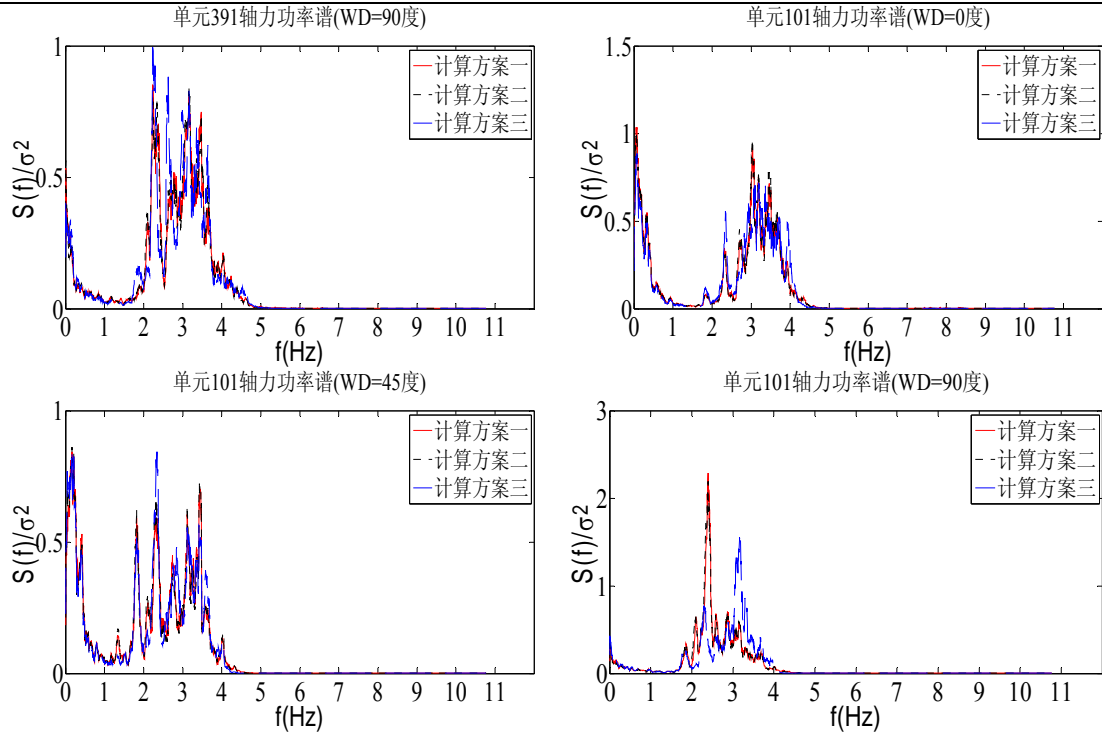
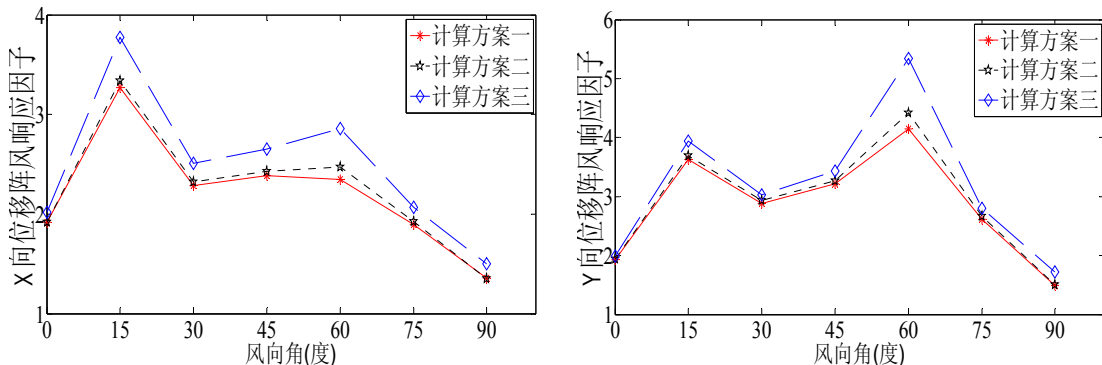


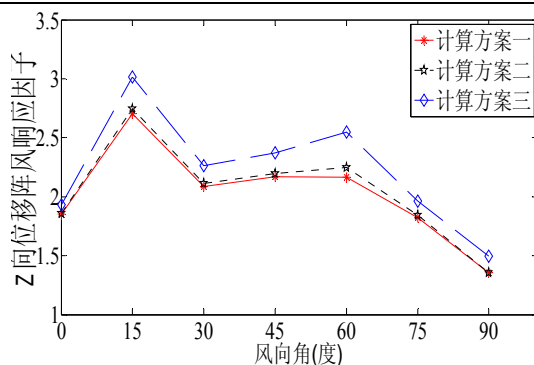
图 4.113 风向角对单元轴力功率谱密度的影响

由图 4.112 和图 4.113 可知，功率谱密度的特征与前文相同，本章在此不予赘述。在不同风向角下，计算方案一、二之间的功率谱密度差异均较计算方案一、三之间的功率谱密度差异小。

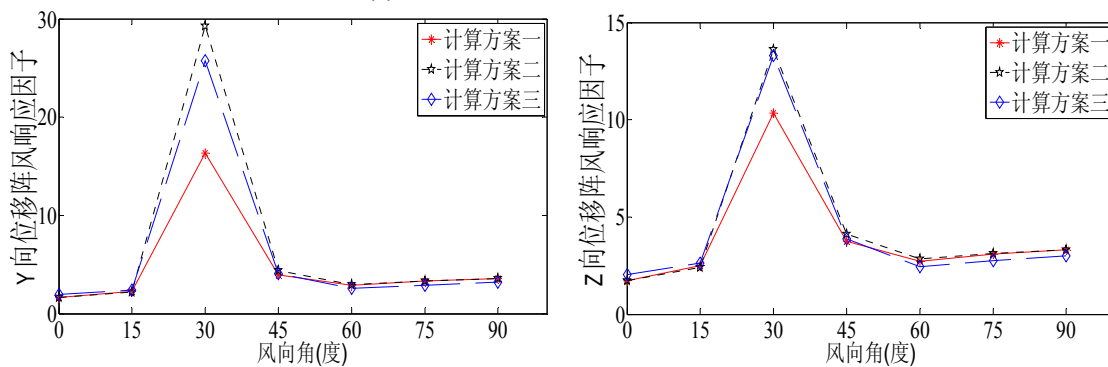
#### 4) 风向角对阵风响应因子的影响

风向角对阵风响应因子的影响见图 4.114 和图 4.115。由图 4.108 可知，节点 3 的所有风向角下的 X 向位移统计值比较小，节点 111 的 0 度风向角下的 X 向位移统计值和 90 度风向角下的 Y 向位移统计值为 0，本章在此对这些情况下的位移阵风响应因子不予研究。

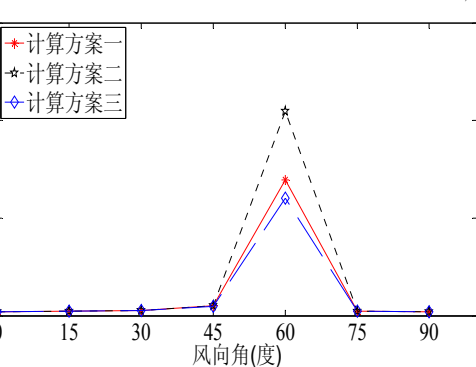
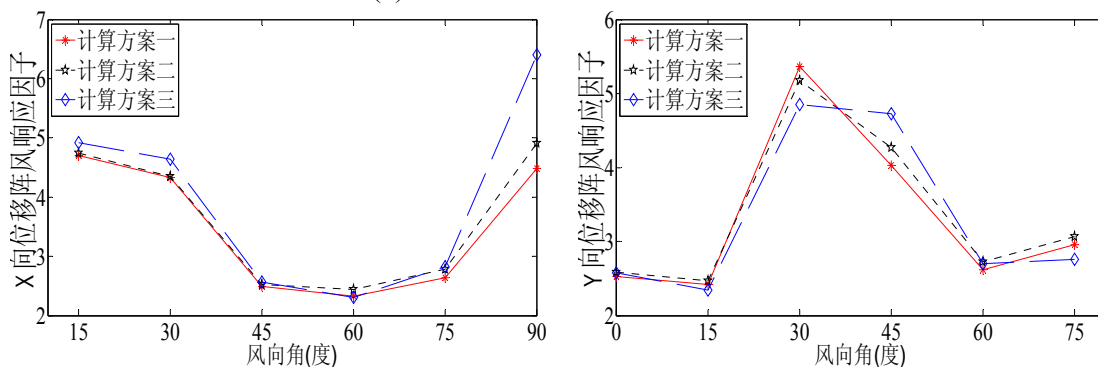




(a) 节点 67 的位移阵风响应因子



(b) 节点 3 的位移阵风响应因子



(c) 节点 111 的位移阵风响应因子

图 4.114 风向角对节点位移阵风响应因子的影响

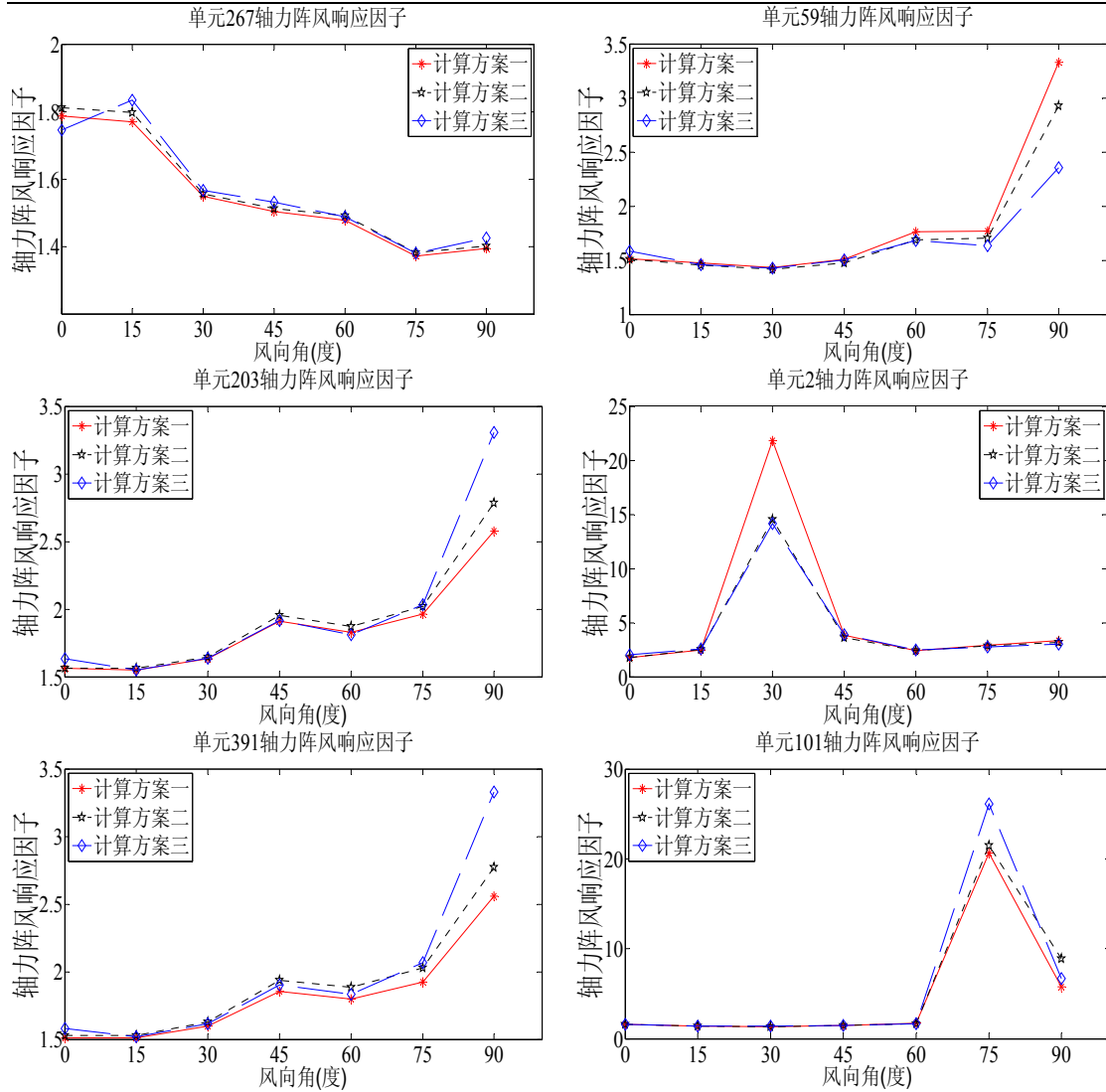


图 4.115 风向角对单元轴力阵风响应因子的影响

由图 4.114 和图 4.115 可知：①在同一风向角下阵风响应因子的值依然随着节点位置和单元位置的不同而不同，因而通常不能取为一常量；②风向角不同，阵风响应因子差异较大，尤其是某些风向角下因子出现较大的异常，文献[38]称之为风振系数奇点；③在不同风向角下，计算方案一、二之间的阵风响应因子差异均较计算方案一、三之间的阵风响应因子差异小。

### 5) 三种计算方案的对比分析

前文就风向角对响应的影响进行了较为详细的阐述，本章在此对三种计算方案的结果进行对比分析，由图 4.108~图 4.115 不难得知：无论风向角如何变化，计算方案一、二之间的差异总体依然较计算方案一、三之间的差异小，因此采用近似计算方案时，依然宜采用方案二考虑平均风荷载引起的非线性。

## 4.4 本章小结

本章以大跨预应力索网屋盖为例对大跨度屋盖几何非线性问题进行了研究，主要的研究成果可以概括如下：

- 1) 采用几何非线性理论对结构的找形进行了详细的研究。对结构找形时，可以忽略结构自重和外荷载的作用，在变形过程中结构的应力大小始终为初始预应力，即不考虑本构关系的影响，此时结构的刚度仅仅由预应力产生，不过预应力大小对结构找形没有影响。
- 2) 采用了三种计算方案对时程计算时初始位形的自振频率进行了计算。结构频率在低频段比较密集，呈连续分布，因此在对结构进行动力分析时，需要考虑多个低阶频率的影响。而结构频率大致在等于内部非约束节点数的阶数后产生较为明显的增长。在一定初始预拉力水平下，低频段的频率在三种计算方案之间的差异较小。
- 3) 采用了三种计算方案对时程计算时初始位形的模态进行了计算。多数情况下，结构前若干阶模态为单轴或双轴反对称形式，不过索网的第1阶模态通常为反对称的。各阶模态在两个方向上均为多波曲线，整个曲面变化复杂，阶数越高，模态形状越复杂。虽然频率接近，但是同阶模态的形状可能存在一定差异。
- 4) 采用了三种计算方案对结构的非线性风致响应时程计算进行了系统的研究，其中计算方案一是一种精确的计算方法，而计算方案二、三是近似方法。计算方案一、二之间的差异总体较计算方案一、三之间的差异小，如果采用近似计算方案时，宜采用方案二考虑平均风荷载引起的非线性，尤其是在初始预拉力较小和基本风压较大的时候。
- 5) 参数分析表明，结构刚度较大时，结构表现出较弱的几何非线性，结构刚度较小时，结构表现出较强的几何非线性。同时参数分析也表明，结构的几何非线性风致响应比较复杂，预应力索网是一种风敏感结构。此外，初始预拉力和基本风压对结构变形的影响较索断面面积和分布荷载对结构变形的影响大，因而在进行结构的抗风设计时，初始预拉力和基本风压是主要控制参数。

## 第 5 章 大跨度屋盖脉动风等效静力风荷载的研究

### 5.1 引言

大跨度屋盖的等效静力风荷载(Equivalent static wind loading,ESWL)在结构设计中扮演着非常重要的角色，一直是风工程研究领域中的热点问题之一。现有计算大跨度屋盖 ESWL 的方法还不能有效解决复杂大跨屋盖的 ESWL，因而本章将对此进行研究。

由第 4 章分析可知，对于大跨度屋盖，可以采用线性方法进行脉动风荷载作用下的响应计算。此外本章将用 CPT 模态求解大跨度屋盖的 ESWL，由文献[114]可知，应用在 POD 分析中的风场应该是减去平均值后的脉动风场。因此本章只计算脉动风荷载的 ESWL，此时的结构为线性结构。

本章首先确定出初始等效目标响应。然后采用两种计算方案对大跨度屋盖的脉动风荷载的ESWL进行研究，通过这两种方案的对比分析，找到一种物理含义明确、计算方法简单和计算精度较高的适合大跨度屋盖ESWL的最佳计算方法。

图5.1给出了本章ESWL的分析框图。

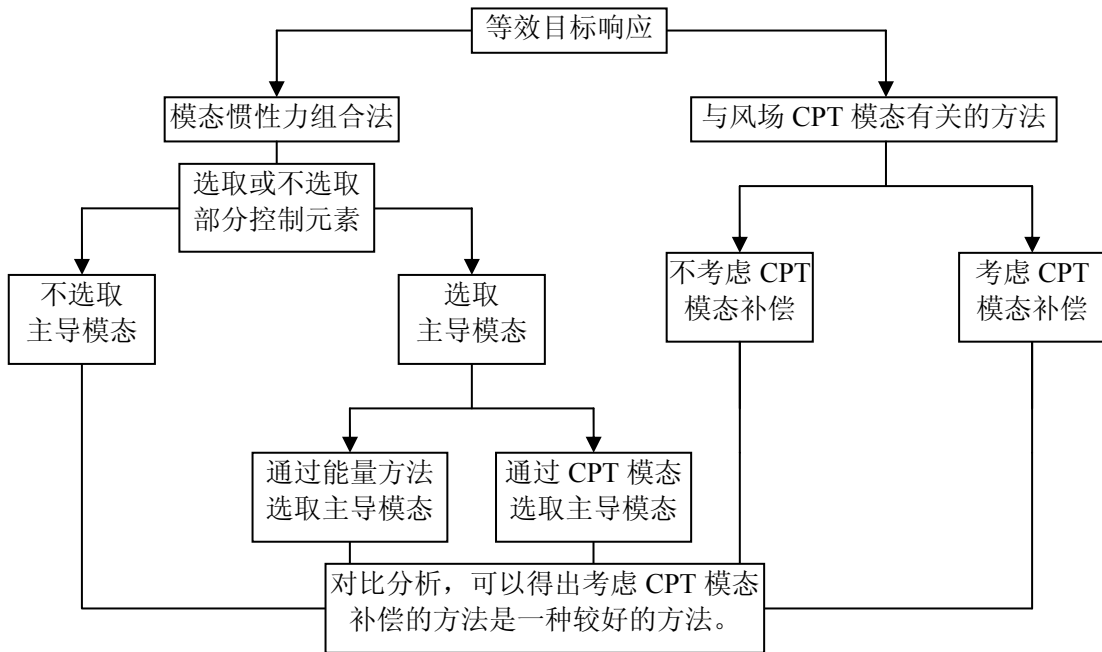


图5.1 脉动风荷载ESWL的分析框图

本章的主要创新点在于：①在用惯性力组合法求大跨度屋盖脉动风荷载的 ESWL时，采用补偿方法解决了模态阶数过少时误差较大的问题；②在采用与结构振动模态无关而仅与风场CPT模态有关的ESWL计算方法时，本章采用CPT模态补偿技术克服了文献[84; 85]的缺陷；③在大跨度屋盖中，如果需要关心一些

重要节点或单元,要求这些节点或单元在ESWL作用下的响应和初始等效目标响应相等,本章采用了带等式约束的最小二乘法来解决这个问题。

## 5.2 初始等效目标响应的确定

由前文可知,ESWL以峰值响应为等效目标,因此本章首先介绍一下峰值响应的确定方法,并介绍在研究ESWL时需要用到的目标响应。

Kasperski[71]指出随机响应 $r$ 的峰值响应 $r_{\max}$ 表示如下:

$$r_{\max} = \bar{r} \pm g\sigma_r \quad (5.1)$$

式中, $\bar{r}$ 表示平均响应; $\sigma_r$ 表示响应均方根(笔者注:单求脉动风荷载的ESWL时, $\sigma_r$ 表示脉动风致响应计算结果); $g$ 表示给定可靠性下的峰值因子,本章取为2.5。

关于式(5.1)中正负号的取法,文献[71]明确指出: $r_{\max}$ 要超过 $\bar{r}$ 。显然要想达到此目的,必须人为使 $\sigma_r$ 与 $\bar{r}$ 二者的符号相同,尽管 $\sigma_r$ 本身是非负的,文献[40; 70; 74; 75; 175]在求ESWL时,实际上也用到了这一点。据此,本章在求ESWL时,所用到的等效目标响应列向量 $\{r_o\}$ 为:

$$\{r_o\} = g \cdot \{sign\{\bar{r}\}\} \cdot \{\sigma_r\} \quad (5.2)$$

需要在此说明的是:①式(5.2)中的有关响应可以通过时域或频域方法计算得出;②此外利用式(5.2)求出的不同等效目标响应之间没有任何关系,因而是不相关的,比如节点位移和单元轴力是不相关的。

## 5.3 惯性力组合法

由绪论可知,与结构振动模态有关的惯性力组合法在大跨度屋盖ESWL计算中扮演着重要的角色。高层建筑的振动多以第一阶模态为主,而大跨度屋盖常常有多阶模态参与振动,因此本节将利用惯性力组合法对大跨度屋盖的ESWL进行研究,从如下方面着手:

- 1) 在大跨度屋盖中,一些高阶模态对振动的贡献占主导地位。本章也将从不选取主导模态和选取主导模态两个方面对ESWL进行研究;
- 2) 在选择主导模态时,将通过能量方法和通过脉动风场的CPT模态进行选择;
- 3) 从多等效目标响应层面研究ESWL;
- 4) 考虑控制元素的影响;
- 5) 当采用少量的参振模态研究ESWL时,误差常常较大,本节采用补偿方法来加以克服。

### 5.3.1 基于等效目标响应为节点位移的惯性力组合法

在式(5.2)中, 设大跨度屋盖等效目标响应 $\{r_o\}$ 为节点位移列向量 $\{r_d\}$ , 对于离散系统,  $\{r_d\}$ 可表达成:

$$\{r_d\} = \sum_{j=1}^N q_j \{\phi_j\} \quad (5.3a)$$

或:

$$\{r_d\} = [\phi] \{q\} \quad (5.3b)$$

式中,  $[\phi] = [\{\phi_1\}, \{\phi_2\}, \dots, \{\phi_N\}]$  为结构模态矩阵,  $\{\phi_j\}$  为结构的第  $j$  阶振动模态;  $N$  表示节点总自由度数; 在线性空间中,  $\{q\} = \{q_1, q_2, \dots, q_N\}^T$  表示  $\{r_d\}$  在  $[\phi]$  中的坐标列向量, 其中  $q_j (j=1, 2, \dots, N)$  表示  $\{r_d\}$  在  $\{\phi_j\}$  的坐标, 也表示第  $j$  阶振动模态的参与系数或组合系数。

则基于等效目标响应为节点位移 $\{r_d\}$ 的惯性力组合法所得的 ESWL 可表示为:

$$\{p_e\} = \sum_{j=1}^N [M] \omega_j^2 q_j \{\phi_j\} \quad (5.4a)$$

或:

$$\{p_e\} = [M][\phi][\Lambda]\{q\} \quad (5.4b)$$

式中,  $[M] = \text{diag}(m_1, m_2, \dots, m_N)$  表示质量矩阵;  $[\Lambda] = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_N^2)$  表示特征值矩阵(或谱矩阵), 也即圆频率平方构成的矩阵。

下面证明在  $\{p_e\}$  作用下结构产生的响应为  $\{r_d\}$ 。

在式(5.4)中, 考虑峰值因子后的第  $j$  项惯性力为  $[M] \omega_j^2 q_j \{\phi_j\}$ , 根据模态的正交性, 对其左乘  $\{\phi_j\}$  的转置可得到第  $j$  项惯性力的拟广义力(笔者注: 根据结构动力学可知, 广义力与时间有关系, 而式(5.5)与时间没有关系, 但是具有类似广义力的形式, 故此本章称之为拟广义力。)  $F_{g,j}$  为:

$$F_{g,j} = M_j^* \omega_j^2 q_j \quad (5.5)$$

式中,  $M_j^* = \{\phi_j\}^T [M] \{\phi_j\}$  表示第  $j$  个模态  $\{\phi_j\}$  对应的广义质量。

根据结构动力学[53]可知, 在  $F_{g,j}$  作用下的坐标为:

$$\frac{F_{g,j}}{K_j^*} = \frac{M_j^* \omega_j^2 q_j}{K_j^*} = q_j \quad (5.6)$$

式中,  $K_j^* = \{\phi_j\}^T [K] \{\phi_j\}$  表示第  $j$  个模态对应的广义刚度,  $[K]$  表示结构刚度矩阵。



由此得以证明在第  $j$  项惯性力  $[M]\omega_j^2 q_j \{\phi_j\}$  作用下产生的位移  $\{r_{d,j}\}$  为:

$$\{r_{d,j}\} = q_j \{\phi_j\} \quad (5.7)$$

对于线性结构, 由于存在叠加原理, 结构在 ESWL—— $\{p_e\}$  的作用下总响应为式(5.3)。所以基于等效目标响应为节点位移的惯性力组合法所得的 ESWL 的表达式(5.4)是正确的。

另外需要说明的是, 在利用式(5.4)求解 ESWL 时, 如果选取所有的  $N$  阶结构振动模态, 可以计算出精确的 ESWL, 也就是在此 ESWL 作用下的节点位移响应和初始等效目标响应是完全一致的。

### 5.3.2 基于等效目标响应为其它响应的惯性力组合法

虽然节点位移响应为大跨度屋盖一种重要的响应, 但是由于大跨度屋盖存在多等效目标问题[70], 因此本节同样给出基于等效目标响应为其它响应(比如单元内力)的惯性力组合法所得的 ESWL。设大跨度屋盖其它等效目标响应  $\{r_o\}$  为  $\{r\}$ , 对于离散系统, 可将式(5.3)写成更广泛的形式[175]:

$$\{r\} = \sum_{j=1}^N c_j \{\phi_j\} \quad (5.8a)$$

或:

$$\{r\} = [\varphi]\{c\} \quad (5.8b)$$

式中,  $[\varphi]$  为响应函数矩阵,  $\{\phi_j\}$  为第  $j$  阶模态的响应函数。对于节点位移响应,  $\{\phi_j\} = \{\phi_j\}$ ,  $[\varphi] = [\phi]$ ; 对于其它响应量, 假设节点位移向量等于  $\{\phi_j\}$ , 此时该响应量相应的值即为  $\{\phi_j\}$ , 相当于除开节点位移外的其它响应的第  $j$  阶模态, 具体表达如下:

$$\{\phi_j\} = \begin{Bmatrix} \phi_{1,j} \\ \phi_{2,j} \\ \vdots \\ \phi_{M,j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^N m_i I_{r1,i} \phi_{i,j} \omega_j^2 \\ \sum_{i=1}^N m_i I_{r2,i} \phi_{i,j} \omega_j^2 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^N m_i I_{rM,i} \phi_{i,j} \omega_j^2 \end{Bmatrix} \quad (5.9)$$

式中,  $i$  表示自由度序号;  $m_i$  表示第  $i$  自由度的集中质量;  $I_{rk,i}$  ( $k=1,2,\dots,M$ ) 表示第  $i$  个自由度对应的影响函数, 也即在结构第  $i$  个自由度处作用单位集中力时所得的结构第  $k$  个研究对象值, 有时也叫单位力的权重函数。

利用矩阵相乘形式, 响应函数矩阵  $[\varphi]$  可表示为:

$$[\varphi] = [I_r][M][\phi][\Lambda] = [I_r]([M][\phi][\Lambda]) \quad (5.10)$$

式中,  $[I_r] = [\{I_{r1}\}, \{I_{r2}\}, \dots, \{I_{rN}\}]$  表示影响函数矩阵,  $\{I_{ri}\} (i=1, 2, \dots, N)$  表示第  $i$  自由度对应的影响函数列向量; 其余符号同上。

由式(5.8)可以求出组合系数  $\{c\}$ , 则基于等效目标响应为其它响应的惯性力组合法所得的组合法所得的 ESWL 可表示为:

$$\{p_e\} = \sum_{j=1}^N [M] \omega_j^2 c_j \{\phi_j\} \quad (5.11a)$$

或:

$$\{p_e\} = [M][\phi][\Lambda]\{c\} \quad (5.11b)$$

需要说明的是: ①一般情况下基于内力等效的精确的大跨度屋盖 ESWL 是不存在的, 即使选取了所有的  $N$  阶结构振动模态, 文献[175]对此进行了证明; ②式(5.4)与式(5.11)形式上是一致的, 只不过是组合系数的求法不一样。

### 5.3.3 惯性力组合法计算中相关的数值解法

在实际应用中, 通常认为体系实际产生的振动由若干少数阶模态振动合成[43], 这样式(5.3)、式(5.4)、式(5.8)和式(5.11)中只需计算  $n (n \ll N)$  阶模态结果; 另外对于复杂的大跨度屋盖, 即使考虑所有阶数模态的结果, 其影响函数矩阵  $[\varphi]$  也常常会出现行数远远大于列数的情况。在大跨度屋盖中, 如果需要关心一些重要节点(本章中称之为控制节点)或单元(本章中称之为控制单元), 要求这些控制节点或控制单元(下文中统称为控制元素)在 ESWL 作用下的响应和初始等效目标响应相等。

上述情况在利用式(5.3)或式(5.8)求解组合系数  $\{q\}$  或  $\{c\}$  时, 常常出现矛盾方程组(或不相容方程组), 解不出这些组合系数的精确值, 但可用到线性方程组最小二乘问题数值解法, 现将相关理论阐述如下。

#### 5.3.3.1 不带任何约束条件的线性超定方程组的最小二乘解

考虑如下形式的线性方程组:

$$[A]\{x\} = \{b\} \quad (5.12)$$

式中,  $[A] \in R^{m \times n}$  为已知实矩阵,  $\{x\} \in R^n$  为未知列向量,  $\{b\} \in R^m$  为已知列向量。

在式(5.12)中, 当  $m = n$  (即  $[A]$  为方阵)且矩阵  $[A]$  非奇异, 则方程组有唯一精确解  $\{x\} = [A]^{-1}\{b\}$ , 在此不予讨论。

对于式(5.12)的线性方程组, 经常会碰到  $m > n$ , 也即方程个数多于未知量个数, 本章称式(5.12)是不带任何约束条件的线性超定方程组。式(5.12)通常没有

精确解,因为它要求 $\{b\}$ 必须是 $R^m$ 的真子空间 $\text{ran}([A])$ 的一个元素[176]。不过此时方程组存在最小二乘解,其通解为:

$$\{x\} = [A]^+ \{b\} + ([I] - [A]^+ [A]) \{z\} \quad (5.13)$$

式中,  $[A]^+$  表示矩阵 $[A]$ 的 Moore-Penrose 广义逆,由 Penrose 方程可知 $[A]^+$ 是存在的并且具有唯一性;  $[I]$ 表示单位矩阵;  $\{z\} \in R^n$ 表示任意的列向量。

在式(5.13)的通解系列中:

$$\{x_{LS}\} = [A]^+ \{b\} \in R^n \quad (5.14)$$

为唯一的范数最小的二乘解,它同时满足[177]:

$$\rho(x_{LS}) = \|[A]\{x_{LS}\} - \{b\}\|_2 = \min \|[A]\{x\} - \{b\}\|_2 \quad (5.15a)$$

和

$$\|\{x_{LS}\}\|_2 = \min \|\{x\}\|_2 \quad (5.15b)$$

式中,  $\|\cdot\|_2$  表示向量的 Euclid 范数(即 2 范数);  $\min$  表示最小值。

式(5.15)称为线性最小二乘问题(简称为 LS 问题),其解 $\{x_{LS}\}$ 亦称为式(5.12)的最小二乘解。

进一步研究[176]表明,在式(5.12)中,当 $[A]$ 是列满秩(即列向量线性无关)时,LS 问题有唯一的最小二乘解为式(5.14)。

需要在此指出的是,在本章中,式(5.12)中的 $[A]$ 即为式(5.3)中的结构模态矩阵 $[\phi]$ 或式(5.8)中的响应函数矩阵 $[\varphi]$ , $\{x\}$ 为式(5.3)或式(5.8)中的组合系数。 $[\phi]$ 和 $[\varphi]$ 的列向量彼此线性无关,因而 $\{x\}$ 有唯一的最小二乘解为式(5.14)。

### 5.3.3.2 等式约束的最小二乘解[176; 177]

在许多实际问题中,线性系统式(5.12)中的参变量 $\{x\}$ 可能不完全独立,它们的数值常要受到某些物理或数学条件的约束,因此讨论这类带约束条件的最小二乘问题具有重要的应用价值。

在式(5.12)中,如把 $[A]$ 和 $\{b\}$ 分成如下的分块矩阵:

$$[A] = \begin{bmatrix} [L] \\ [K] \end{bmatrix}, \{b\} = \begin{bmatrix} \{h\} \\ \{g\} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

式中,设 $[L] \in R^{m_1 \times n}$ ,  $[K] \in R^{m_2 \times n}$ ,  $\{h\} \in R^{m_1}$ ,  $\{g\} \in R^{m_2}$ ,  $m = m_1 + m_2$ 。在进行计算时,如果要求在 $[L]$ ,  $\{h\}$ 中没有误差,而在 $[K]$ ,  $\{g\}$ 中含有误差,即:

$$[K]\{x\} \approx \{g\}, \text{ 而 } [L]\{x\} = \{h\} \quad (5.17)$$

式中,符号“ $\approx$ ”表示约等号。这类问题叫做等式约束最小二乘问题(简称为 LSE 问题)。

LSE 问题的通解为:

$$\{x\} = [L_k^+] \{h\} + ([K][P])^+ \{g\} + ([P] - ([K][P])^+ [K][P]) \{z\} \quad (5.18)$$

式中,  $[P] = [I] - [L]^+ [L]$ ,  $[L_k^+] = [I] - ([K][P])^+ [K][L]^+$ , 其余符号同前。

LSE 问题的最小范数解有下面的形式:

$$\{x_{LSE}\} = [L_k^+] \{h\} + ([K][P])^+ \{g\} \quad (5.19)$$

当下面的条件[178]:

$$\text{rank}([L]) = m_1, \text{rank}([A]) = n \quad (5.20)$$

成立时, LSE 问题有唯一解, 为式(5.19), 式中  $\text{rank}(\cdot)$  表示对矩阵求秩。

在此同样需要指出的是, 在本章下文中考虑控制元素时结构参振模态数目对整体误差的影响的内容中, 当控制元素的  $[\phi]$  或  $[\varphi]$  的列向量数不小于行向量时, 参数结构便满足式(5.20), 因而  $\{x\}$  有唯一的最小二乘解为式(5.19), 否则不存在唯一最小二乘解。

### 5.3.4 算例验证与分析

本节仍然采用第2章的工程实例进行分析, 其ANSYS有限元模型见图5.2。在该模型中, 用二力杆单元link8单元模拟干煤棚上下弦弦杆, 用集中质量单元mass21模拟干煤棚表面的覆板质量。有限元模型中共有2592个节点, 11412个单元, 其中周边完全固定的节点数为142, 两端为完全固定节点的杆单元数为612, 该结构为多节点、多单元的复杂大跨度屋盖结构。图中x坐标与纵向平行, y坐标沿横向方向, z坐标竖直向下。

因为本工程为空间桁架结构, 所以其响应有节点位移和单元轴力。本结构自由(非完全固定)节点数为 2450 个, 每个节点有 3 个平动自由度, 因而结构总自由度为 7350 个, 结构模态阶数以及频率阶数均为 7350 阶, 结构的三维节点位移也有 7350 个; 此外自由(非完全固定)的二力杆单元数为 10080 个, 结构单元的轴力有 10080 个。

根据本结构的实际情况, 本章采用时域方法来计算结构风致抖振响应, 其相关的计算参数有: (1)基本风压: 0.80Kpa(50 年重现期); (2)结构阻尼比: 0.01; (3)时间步长: 0.1043s; (4)体系为经典阻尼体系, 阻尼矩阵  $[c]$ 、质量矩阵  $[M]$  和刚度矩阵  $[K]$  的关系为  $[c] = \alpha[M] + \beta[K]$ , 本章中  $\alpha = 0.1578$ ,  $\beta = 5.1733 \times 10^{-4}$ 。本章对多个重要风向角的风振响应进行了分析, 限于篇幅, 本章以 90 度风向角且周边无其它干扰建筑的 B 类风场的风洞试验结果, 对受扰干煤棚的 ESWL 进行研究。本算例中定量分析误差依然采用式(2.36)所定义的夹角  $\theta$  和式(2.38)所定义的相对误差  $e$  两个参数:

$$\theta = \arccos \left( \frac{\{X\}^T \{Y\}}{\|\{X\}\|_2 \|\{Y\}\|_2} \right) \quad (2.36)$$

和

$$e = \frac{\|\{X\} - \{Y\}\|_2}{\|\{Y\}\|_2} \quad (2.38)$$

式中,  $\{X\}$  表示在 ESWL 作用下的节点位移响应或单元轴力响应,  $\{Y\}$  表示节点位移或单元轴力的初始等效目标响应, 本章认为是精确的。

在此说明一下, 本章下文中的节点位移误差指的是在 ESWL 作用下的节点位移和初始等效节点位移之间的误差; 单元轴力误差指的是在 ESWL 作用下的单元轴力和初始等效单元轴力之间的误差。显然,  $\theta$  和  $e$  越小,  $\{X\}$  与  $\{Y\}$  之间的误差越小, ESWL 越精确; 当  $\theta$  和  $e$  同时为零时,  $\{X\}$  完全等于  $\{Y\}$ , 则 ESWL 是精确的; 此外误差相同时, 用惯性力组合法计算所得的 ESWL 也相同。

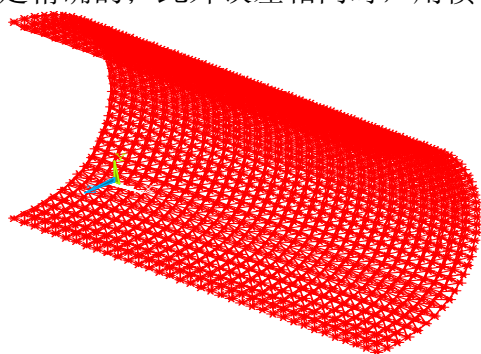


图 5.2 干煤棚有限元模型

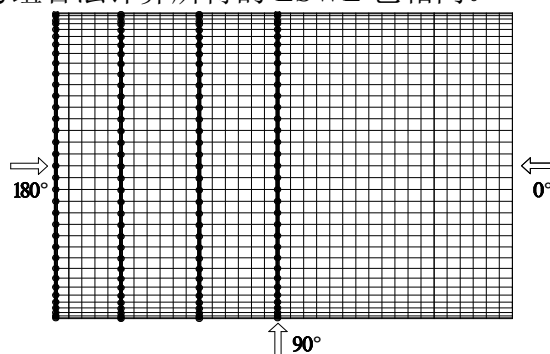


图 5.3 上表面第 1、6、12 和 18 跨的节点和单元

### 5.3.4.1 参振模态对 ESWL 的影响

对于多模态参与振动的结构, 如何选取参振模态对于利用惯性力组合法求解大跨度屋盖的 ESWL 而言是一个重要的问题。本章将从不选取结构主导模态(对结构振动有较大贡献的模态)和选取主导模态两个方面来研究参振模态对大跨度屋盖的 ESWL 的影响, 其中在每个方面的研究中同时考虑了有、无控制元素对整体误差的影响。

#### 1、不选取结构主导模态

当不选择主导模态时, 本章首先根据式(5.2)求出结构节点位移和单元轴力的初始等效目标响应; 然后取结构前 100 阶、前 200 阶、前 300 阶、前 400 阶、前 500 阶、前 1000 阶、前 1500 阶、前 2000 阶、前 2500 阶、前 3000 阶、前 3500 阶、前 4000 阶、前 4500 阶、前 5000 阶、前 5500 阶、前 6000 阶、前 6500 阶、前 7000 阶以及所有 7350 阶等 19 种情况下的结构模态(本章称为非主导模态),

分别利用式(5.4)和式(5.11)来对基于节点位移和单元轴力的 ESWL 进行研究。

## 1) 无控制元素的影响

当不考虑控制元素时,在选定参振模态的情况下,本章首先利用 LS 问题求出式(5.3)和式(5.8)中的组合系数列向量  $\{q\}$  和  $\{c\}$ ,然后分别代入式(5.4)和式(5.11)再求 ESWL。求出 ESWL 后,再施加在结构上,并求出相应响应,并和初始等效目标响应进行误差(笔者注:如没有特殊强调,本章下文中的误差均指 ESWL 作用下结构的响应和初始等效目标响应之间的误差)分析,以便检验结构参振模态对 ESWL 精度的影响。

### (1) 整体误差分析

根据式(2.36)和式(2.38),本章对所有 7350 个节点位移和所有 10080 个杆单元轴力的整体误差(笔者注:如没有特殊强调,本章下文中的整体误差均指所有 7350 个节点位移和所有 10080 个杆单元轴力的误差)进行了计算,整体误差结果见表 5.1。

由表 5.1 可知,结构模态的参振数目对整体误差的影响是非常大的,参振数目越少,误差越大。无论基于节点位移还是单元轴力,显然不能仅仅采用部分低阶模态来求 ESWL,需要考虑中、高阶模态的影响,否则误差非常大,即使利用最小二乘法来优化误差;此外当选择所有 7350 阶模态时,对于节点位移,整体误差  $\theta$  和  $e$  均为 0,而对于单元轴力,整体误差为  $\theta = 0.1583$  和  $e = 0.1576$ ,这证明了基于节点位移的 ESWL 是精确的,而基于单元轴力的 ESWL 并不精确的,这与文献[175]的结论是一致的。

表 5.1 没有控制元素时结构非主导参振模态数目对整体误差的影响

| 结构<br>模态<br>阶数 | 整体误差                 |        |                      |        | 结构<br>模态<br>阶数 | 整体误差                 |        |                      |        |
|----------------|----------------------|--------|----------------------|--------|----------------|----------------------|--------|----------------------|--------|
|                | 节点位移                 |        | 单元轴力                 |        |                | 节点位移                 |        | 单元轴力                 |        |
|                | $\theta(\text{rad})$ | $e$    | $\theta(\text{rad})$ | $e$    |                | $\theta(\text{rad})$ | $e$    | $\theta(\text{rad})$ | $e$    |
| 100            | 0.3839               | 0.3745 | 0.4081               | 0.3969 | 3500           | 0.1956               | 0.1944 | 0.3084               | 0.3036 |
| 200            | 0.3487               | 0.3416 | 0.3955               | 0.3853 | 4000           | 0.1740               | 0.1731 | 0.2910               | 0.2869 |
| 300            | 0.3359               | 0.3296 | 0.3804               | 0.3713 | 4500           | 0.1555               | 0.1549 | 0.2762               | 0.2727 |
| 400            | 0.3073               | 0.3025 | 0.3775               | 0.3686 | 5000           | 0.1359               | 0.1355 | 0.2721               | 0.2688 |
| 500            | 0.3018               | 0.2937 | 0.3754               | 0.3666 | 5500           | 0.1240               | 0.1237 | 0.2658               | 0.2627 |
| 1000           | 0.2686               | 0.2654 | 0.3577               | 0.3501 | 6000           | 0.1085               | 0.1083 | 0.2481               | 0.2455 |
| 1500           | 0.2481               | 0.2456 | 0.3447               | 0.3380 | 6500           | 0.0916               | 0.0915 | 0.2330               | 0.2309 |
| 2000           | 0.2378               | 0.2356 | 0.3365               | 0.3302 | 7000           | 0.0595               | 0.0595 | 0.1892               | 0.1880 |
| 2500           | 0.2291               | 0.2271 | 0.3312               | 0.3252 | 7350           | 0.0000               | 0.0000 | 0.1583               | 0.1576 |
| 3000           | 0.2140               | 0.2124 | 0.3192               | 0.3138 |                |                      |        |                      |        |

## (2) 局部误差分析

在用式(2.36)和式(2.38)计算整体误差时,初始等效目标中(绝对值)较小的响应可能会带来较大的误差,而(绝对值)较大的响应带来的误差可能会较小。为此本章选出初始等效目标中(绝对值)较大的前一定数量的响应作为研究对象,其绝对值后的分布情况见图 5.4,由于篇幅限值,本章计算出考虑前 100 阶和所有 7350 阶模态的情况下所得的 ESWL 作用下的相对应位置的响应,并用式(2.36)和式(2.38)对这些响应的误差(本章中称为局部误差)进行分析,见图 5.5。

由图 5.5 可知:对所关注的一定数量的最大(笔者注:如没有特殊强调,此处包括本章下文的最大指的是绝对值最大)响应而言,较少的参振模态数所产生的误差几乎随着最大响应个数的增加而呈快速的线性增长趋势,较少的参振模态数只对很少的一部分较大响应精度稍好,而对绝大多数响应并不适合;而考虑所有 7350 阶模态时,无论选取多少个最大响应,局部误差都较小,尤其是对于节点位移,局部误差始终为零。

在图 5.4 所关注的一定数量的最大响应中,前面 500 个最大节点位移随着最大响应个数增加而快速减小,前面 300 个最大轴力随着最大响应个数增加而快速减小,此后两种响应随着最大响应个数增加而缓慢减小。对于算例如此复杂的结构,如果需要关注最大响应的话,笔者认为至少需要关注前面 500 个最大节点位移和前面 300 个最大轴力。但由图 5.5 可知,少数参振模态数对这些较少的响应所造成的误差还是较大,而所有 7350 阶模态对这些较少的响应所造成的误差很小。

需要说明的是,图 5.5 的规律在本章下文中也存在,不再赘述。

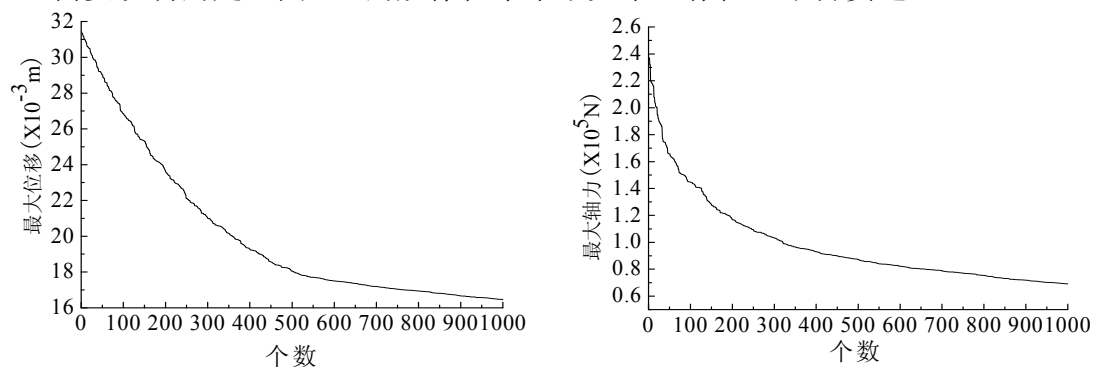


图 5.4 最大响应分布情况

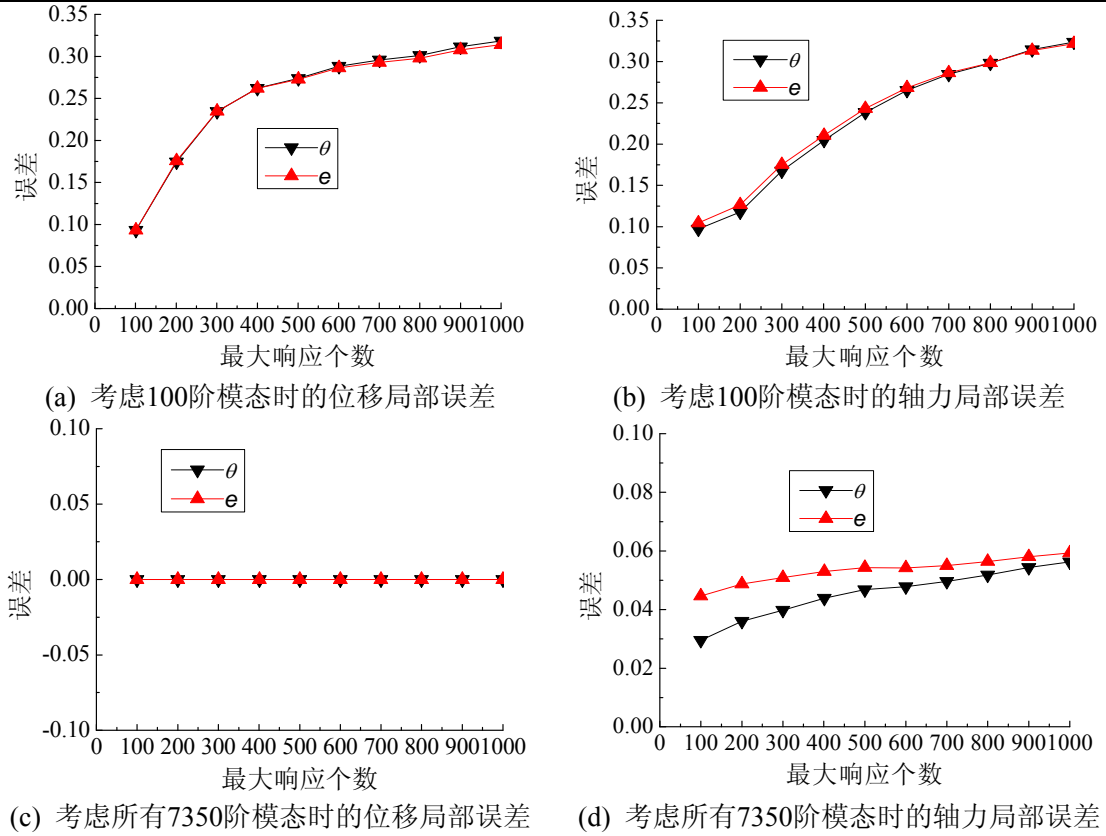
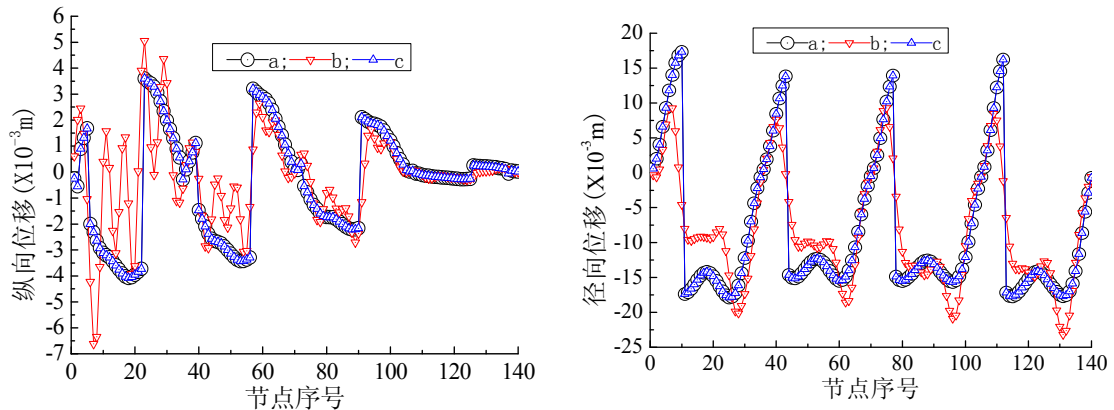


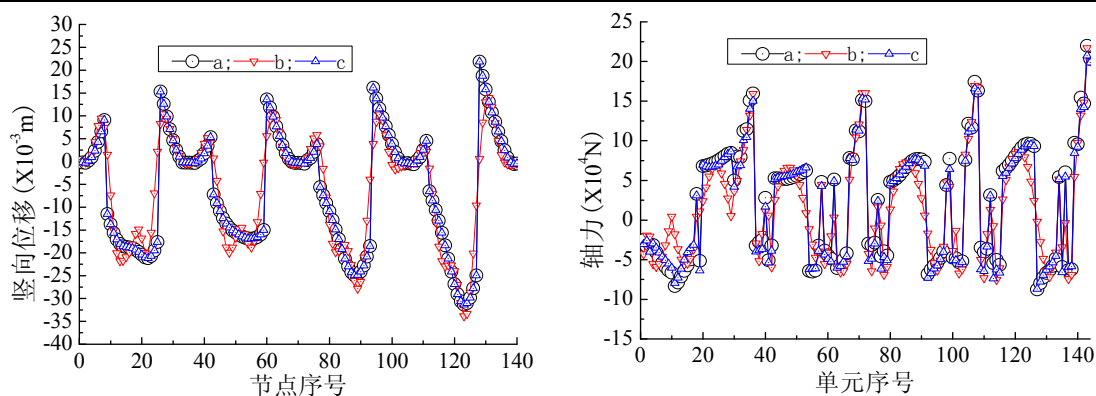
图 5.5 局部误差分析

### (3) 部分节点和单元响应对比分析

上述误差分析没有直接对响应进行具体的对比，对于如此复杂的结构，有必要研究一下参振模态数对一些节点和单元的误差影响。限于篇幅，本章对图 5.3 所示上表面第 1、6、12 和 18 跨的节点和单元的初始等效目标响应和在前 100 阶、所有 7350 阶参振模态所得到的 ESWL 下的响应进行对比分析，见图 5.6。







注: a 表示由式(5.2)计算得到的初始等效目标响应; b 表示由前 100 阶模态计算得到的 ESWL 作用下的响应; c 表示由所有 7350 阶模态计算得到的 ESWL 作用下的响应。

图 5.6 上表面部分节点和单元响应对比分析

由图 5.6 可知, 参振模态越少, 在 ESWL 作用下的响应和初始等效目标响应之间的差异越大, 这说明 ESWL 的精度越低; 相反参振模态越多, 在 ESWL 作用下的响应和初始等效目标响应之间的差异越小, 这反映出所计算的 ESWL 精度越高。显然不能采用少数低阶模态求解大跨度屋盖的 ESWL, 这与表 5.1 和图 5.5 的结果是一致的。

需要说明的是, 在本节下文中同样存在图 5.6 的特征, 因此不予赘述。

#### (4) 结构上表面法向 ESWL 云图

为了便于后文对比分析, 本章给出所有 7350 阶参振模态的结构上表面法向 ESWL 云图, 见图 5.7, 由本章前文分析可知该种情况下的 ESWL 为精度最高的 ESWL。图中压力离开表面为负, 指向表面为正(笔者注: 如没有特殊强调, 本章下文中 ESWL 云图均指结构上表面法向 ESWL 云图, 正负号与此处相同, 单位均为 KPa)。

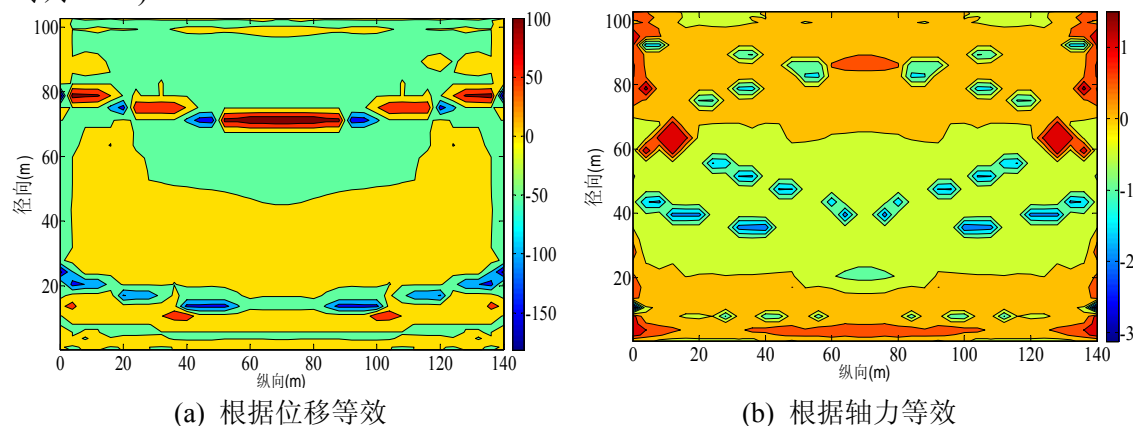


图 5.7 考虑所有 7350 阶模态时结构上表面法向 ESWL 云图(KPa)

由图 5.7 可知: ESWL 是关于径向中轴线对称分布的, 这与试验时外荷载的

对称性是一致的；根据不同初始等效目标响应算出的 ESWL 差异是比较大的。

在图 5.7 中，根据节点位移等效的 ESWL 和根据单元轴力等效的 ESWL 差异较大，在此有必要证明一下是否是因为由式(5.2)算出的不同初始等效目标响应之间是完全独立不相关的原因所造成的。

本章采用如下方式进行证实：首先把由式(5.2)得到的初始节点位移等效目标响应施加在结构上，求出相应的单元轴力，然后把此单元轴力作为初始轴力等效目标响应，本章称之为修正初始轴力等效目标响应，根据本章前文介绍的相同方法求出修正初始轴力等效目标响应对应的 ESWL，再和初始节点位移等效目标响应对应的 ESWL 进行对比分析。限于篇幅，本章对取前 100 阶模态和所有 7350 阶模态进行研究，其基于修正初始轴力等效目标响应的 ESWL 云图，见图 5.8。

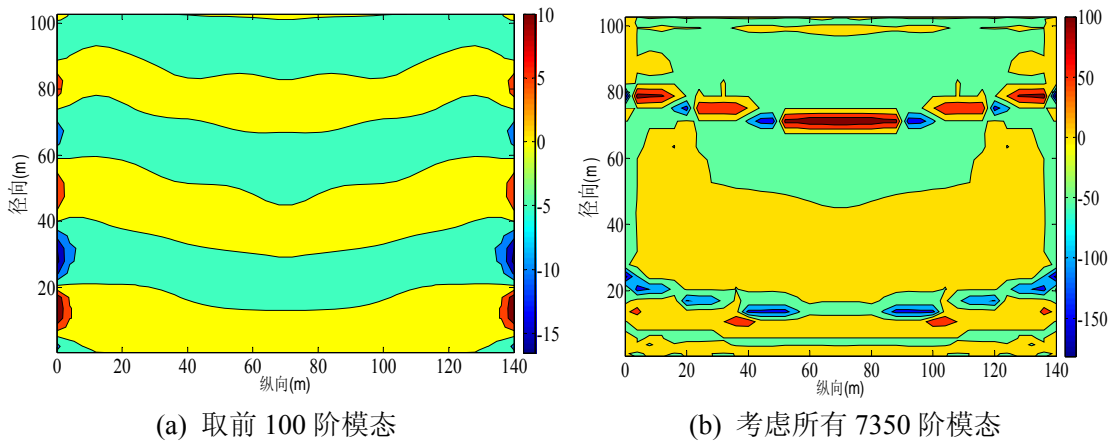


图 5.8 基于修正初始轴力等效目标响应的 ESWL 云图

此外，本章也给出基于式(5.2)得到的初始节点位移等效目标响应的取前 100 阶模态所得的 ESWL 云图，见图 5.9。

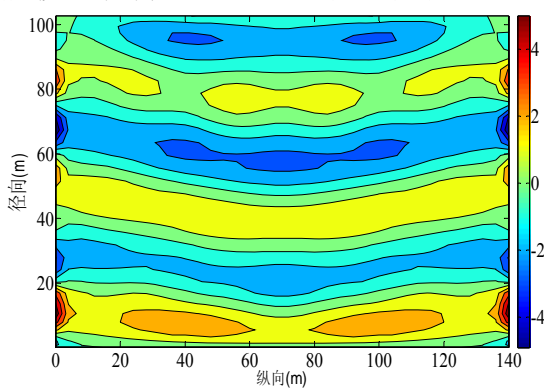


图 5.9 考虑前 100 阶模态时基于式(5.2)所得初始节点位移等效的 ESWL 云图

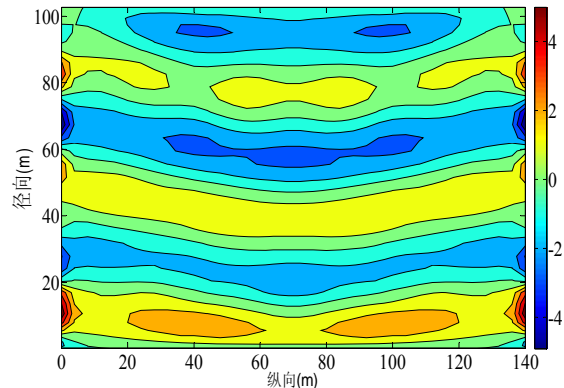


图 5.10 考虑前 100 阶模态时基于由修正初始节点位移等效目标响应得到的修正初始轴力等效目标响应的 ESWL 云图

对比图 5.7(a)和图 5.8(b)，发现当考虑所有 7350 阶模态时，根据式(5.2)的初始节点位移等效目标响应所得的 ESWL 和根据修正初始轴力等效目标响应所得

的 ESWL 是完全相同,同时可以计算出图 5.8(b)的整体误差  $\theta$  和  $e$  均为 0(笔者注:此处及图 5.8(a)的整体误差指 ESWL 作用下结构轴力响应和修正初始轴力等效目标响应之间的误差)。此时需要注意的是,修正初始轴力等效目标响应是根据式(5.2)的初始节点位移等效目标响应求得的,二者是完全相关的,因而所得的 ESWL 应该完全相同;由前文可知,根据式(5.2)算出的不同初始等效目标响应之间是完全独立不相关的,因而图 5.7 所得的 ESWL 之间没有任何联系,可以存在较大差异。

但是对比图 5.9 和图 5.8(a),发现二者差异较大,同时可以计算出图 5.8(a)的整体误差为  $\theta=1.3825$  和  $e=0.9823$ ,而由表 5.1 可知图 5.9 的整体误差为  $\theta=0.3839$  和  $e=0.3745$ ,整体误差水平相差也很大。但是需要注意的是,对于图 5.9,在利用式(5.4)求 ESWL 时,其中的组合系数  $\{q\}$  是由式(5.3)数值计算得到的近似值,把这些近似值重新代入式(5.3)可以求得一个位移列向量(本章中称为修正初始位移等效目标响应),显然修正初始位移等效目标响应和由式(5.2)所得的初始位移等效目标响应并不相等,实际上基于修正初始位移等效目标响应的精确的 ESWL 便是图 5.9,而修正初始位移等效目标响应和修正初始轴力等效目标响应是完全独立不相关的,因而造成了图 5.9 和图 5.8(a)及其整体误差的较大的差异。同时本章也给出考虑前 100 阶模态时,基于由修正初始位移等效目标响应得到的修正初始轴力等效目标响应(二者之间完全相关)的 ESWL 云图(见图 5.10)及图 5.10 的整体误差  $\theta$  和  $e$  均为 0,显然图 5.9 和图 5.10 二者完全相同。

顺便提及一下,当考虑所有 7350 阶模态时,由式(5.3)计算的组合系数  $\{q\}$  是精确值,修正初始位移等效目标响应和由式(5.2)所得的初始位移等效目标响应完全相等,当然修正初始位移等效目标响应也和修正初始轴力等效目标响应完全相关,因而图 5.7(a)和图 5.8(b)是完全一致的。

由以上分析可知,只要响应是完全相关的,基于不同响应的 ESWL 是完全相同的;只要响应是完全独立不相关的,基于不同响应的 ESWL 可能是完全不同的。

## 2) 有控制元素的影响

表 5.1 在研究结构参振模态对整体误差的影响时,没有牵涉到控制元素。大跨度屋盖中可能需要关心一些元素,要求这些控制元素在 ESWL 作用下的响应和初始等效目标响应相等。在此,本章在结构上表面选出了 49 个控制节点(图 5.11)和 66 个控制单元(图 5.12),利用本章前文介绍的等式约束最小二乘问题来研究结构参振模态对 ESWL 的影响,整体误差结果见表 5.2。

需要指出的是:在计算节点位移的组合系数  $\{q\}$  时,如果取结构前 100 阶模

态, 此时控制节点的模态矩阵  $L \in R^{147 \times 100}$ ,  $rank(L) = 100 \neq 147$ , 不满足式(5.20), LSE 问题没有唯一解, 本章不予考虑, 其余阶数的模态的 LSE 问题存在唯一解; 在计算单元轴力的组合系数  $\{c\}$  时, 因为满足式(5.20)的条件, 19 种模态情况下的 LSE 问题都存在唯一解。

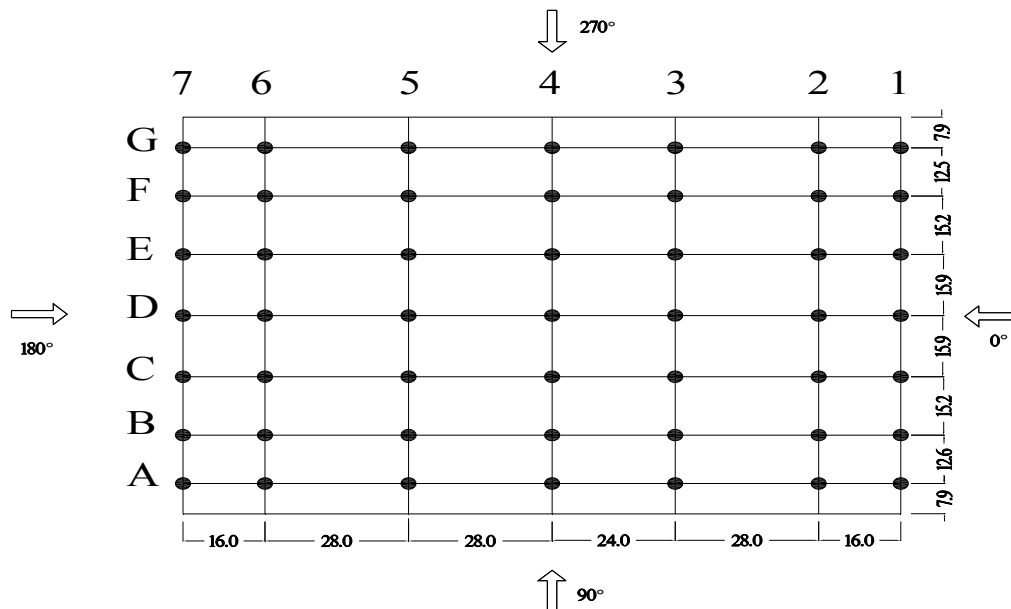


图 5.11 控制节点(俯视图)

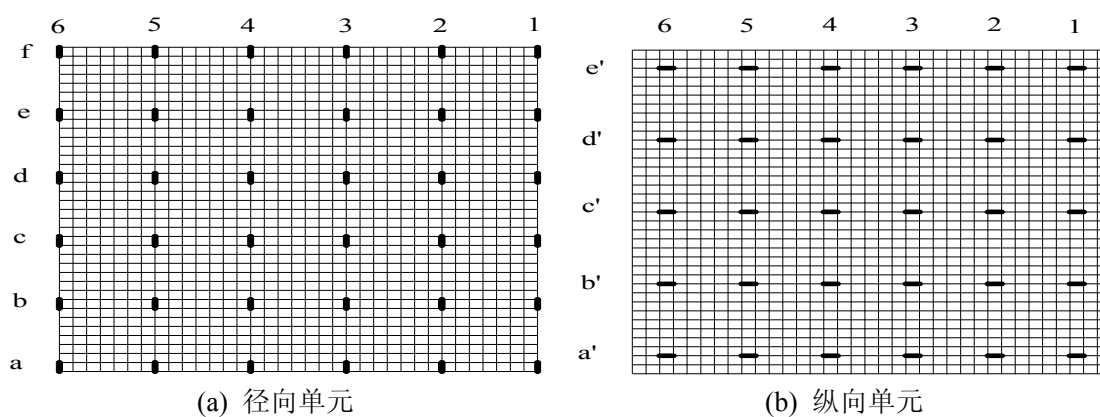


图 5.12 控制单元(俯视图)

表 5.2 考虑控制元素时结构非主导参振模态数目对整体误差的影响

| 结构<br>模态<br>阶数 | 整体误差           |         |                |        | 结构<br>模态<br>阶数 | 整体误差           |        |                |        |
|----------------|----------------|---------|----------------|--------|----------------|----------------|--------|----------------|--------|
|                | 节点位移           |         | 单元轴力           |        |                | 节点位移           |        | 单元轴力           |        |
|                | $\theta$ (rad) | $e$     | $\theta$ (rad) | $e$    |                | $\theta$ (rad) | $e$    | $\theta$ (rad) | $e$    |
| 100            |                |         | 0.5322         | 0.5133 | 3500           | 0.1997         | 0.1983 | 0.3103         | 0.3054 |
| 200            | 1.4913         | 21.1062 | 0.4666         | 0.4508 | 4000           | 0.1763         | 0.1754 | 0.2921         | 0.2880 |
| 300            | 1.4770         | 5.5036  | 0.4282         | 0.4159 | 4500           | 0.1569         | 0.1562 | 0.2769         | 0.2733 |
| 400            | 1.1042         | 1.682   | 0.4121         | 0.4008 | 5000           | 0.1370         | 0.1366 | 0.2728         | 0.2694 |
| 500            | 1.0305         | 1.4156  | 0.4021         | 0.3914 | 5500           | 0.1246         | 0.1243 | 0.2665         | 0.2633 |

续前表

|      |        |        |        |        |      |        |        |        |        |
|------|--------|--------|--------|--------|------|--------|--------|--------|--------|
| 1000 | 0.4761 | 0.4822 | 0.3714 | 0.3634 | 6000 | 0.1087 | 0.1085 | 0.2487 | 0.2461 |
| 1500 | 0.2600 | 0.2571 | 0.3567 | 0.3496 | 6500 | 0.0917 | 0.0915 | 0.2337 | 0.2315 |
| 2000 | 0.2465 | 0.244  | 0.3434 | 0.3369 | 7000 | 0.0595 | 0.0595 | 0.1899 | 0.1888 |
| 2500 | 0.2370 | 0.2347 | 0.3349 | 0.3287 | 7350 | 0.0000 | 0.0000 | 0.1592 | 0.1585 |
| 3000 | 0.2200 | 0.2182 | 0.3221 | 0.3166 |      |        |        |        |        |

由表 5.2 同样可以发现结构参振模态数量对整体误差的影响是非常大的。由表 5.1 和表 5.2 对比分析可知：尽管采用等式约束最小二乘问题可以保证这些控制元素没有误差，但是等式约束加大了最小二乘问题的整体误差，使得其它非控制元素的误差相当大。因此当参振模态阶数相同时，存在控制元素的整体误差要大于没有控制元素时的整体误差，参振模态阶数越少，两个整体误差之间的差异越大，这在节点位移中表现更加突出。上述特征表明如果存在控制元素的话，不能仅仅采用部分低阶模态来求大跨度屋盖的 ESWL，虽然对于控制元素部分不存在任何误差。

## 2、选取结构主导模态

前文已经证明，无论有、无控制元素，对于非常复杂的大跨度屋盖，结构参振模态对 ESWL 的精度影响很大，不能仅仅采用部分低阶模态来求大跨度屋盖的 ESWL，虽然采用最小二乘方法可以将误差最小化。文献[6]通过数值分析发现大跨度屋盖存在一些高阶模态对风振响应大，起着主导模态的作用，但由于其模态阶次高而往往被忽略。在此本章将用不同方法来选取结构主导模态，来研究参振模态对大跨度屋盖的 ESWL 精度的影响。

### 1) 根据应变能选取主导结构模态

系统总的瞬态应变能为[6]：

$$E(t) = \frac{1}{2} \{x(t)\}^T [K] \{x(t)\} \quad (5.21)$$

式中， $\{x(t)\}$  表示瞬态位移列向量； $[K]$  表示刚度矩阵。

由模态位移叠加法， $\{x(t)\}$  可以表示为：

$$\{x(t)\} = \sum_{j=1}^N q_j(t) \{\phi_j\} \quad (5.22)$$

式中， $\{\phi_j\}$ 、 $q_j(t)$  分别表示系统的第  $j$  阶结构模态及其对应模态坐标； $N$  表示结果所有结构模态的数量。

而第  $j$  阶模态的瞬态应变能为：

$$E_j(t) = \frac{1}{2} \{q_j(t) \{\phi_j\}\}^T [K] \{q_j(t) \{\phi_j\}\} \quad (5.23)$$

由模态关于体系 $[K]$ 的正交性不难得知：

$$E(t) = \sum_{j=1}^N E_j(t) \quad (5.24)$$

按照文献[162]静力荷载参与系数理论，只要主导模态的能量和占到总能量的90%，此时选择的主导模态数量便是合理。

需要在此特别说明的是，由于式(5.2)所示的位移初始等效目标响应与时间没有关系，因此本章没有考虑风荷载频率与结构频率接近时才容易激起结构模态参与振动这一特点(下文在根据脉动风场 CPT 模态选取主导结构模态也没有考虑这一点)，根据实际计算情况，本章在此只是根据应变能的相对大小来判断主导模态。在用式(5.21)~式(5.24)计算系统总应变能和各阶模态的应变能时，也与时间没有关系，相关参数即取本章前文与时间无关的计算结果即可。由式(5.23)可以计算出本结构各阶模态的应变能，见图 5.13。

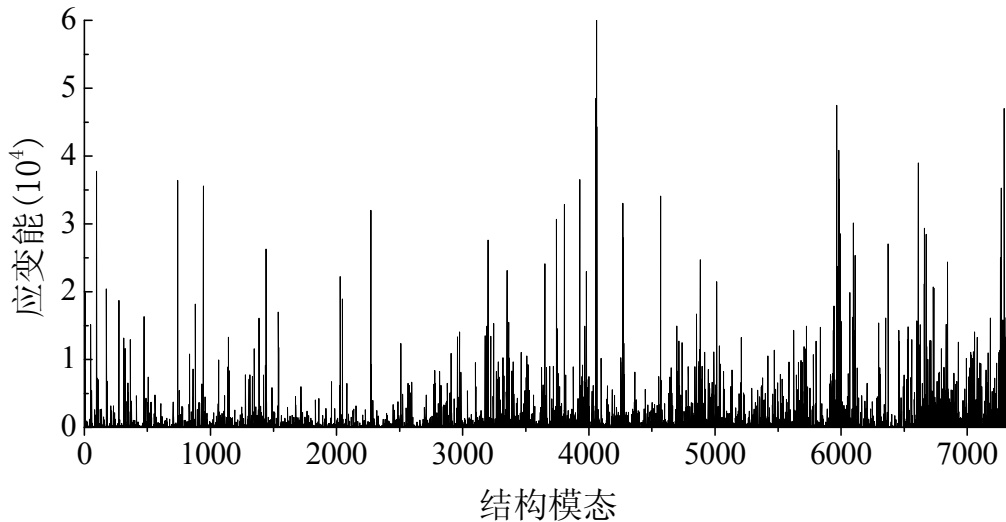


图 5.13 每阶模态的应变能(N.m)

由图 5.13 可以发现，主导模态的阶数比较分散，低阶、中阶、高阶都存在，甚至在 7000 阶以后还有主导模态，显然不能仅仅选用低阶模态来计算风振响应及其大跨度屋盖的 ESWL。

据图 5.13，本章按照能量从大到小进行模态排序，选取排序后的前 100 阶、前 200 阶、前 300 阶、前 400 阶、前 500 阶、前 1000 阶、前 1500 阶、前 2000 阶、前 2500 阶、前 3000 阶、前 3500 阶、前 4000 阶等 12 种情况下的主导结构模态。然后按照本章前文中不选取结构主导模态的方法来研究参振模态对 ESWL 的影响，其不考虑控制元素时的整体误差见表 5.3。

表 5.3 没有控制元素时结构主导参振模态(应变能选取)数目对整体误差的影响

| 主导<br>结构<br>模态<br>阶数 | 整体误差                 |        |                      |        | 主导<br>结构<br>模态<br>阶数 | 整体误差                 |        |                      |        |
|----------------------|----------------------|--------|----------------------|--------|----------------------|----------------------|--------|----------------------|--------|
|                      | 节点位移                 |        | 单元轴力                 |        |                      | 节点位移                 |        | 单元轴力                 |        |
|                      | $\theta(\text{rad})$ | $e$    | $\theta(\text{rad})$ | $e$    |                      | $\theta(\text{rad})$ | $e$    | $\theta(\text{rad})$ | $e$    |
| 100                  | 0.8094               | 0.7239 | 0.6748               | 0.6248 | 1500                 | 0.1683               | 0.1675 | 0.3542               | 0.3468 |
| 200                  | 0.7909               | 0.7110 | 0.6624               | 0.6150 | 2000                 | 0.1199               | 0.1196 | 0.3317               | 0.3256 |
| 300                  | 0.4087               | 0.3974 | 0.5847               | 0.5520 | 2500                 | 0.0580               | 0.0579 | 0.2820               | 0.2783 |
| 400                  | 0.3796               | 0.3706 | 0.5650               | 0.5354 | 3000                 | 0.0272               | 0.0272 | 0.2610               | 0.2580 |
| 500                  | 0.3578               | 0.3502 | 0.5527               | 0.5250 | 3500                 | 0.0093               | 0.0093 | 0.1736               | 0.1727 |
| 1000                 | 0.2160               | 0.2143 | 0.3969               | 0.3866 | 4000                 | 0.0000               | 0.0000 | 0.1583               | 0.1576 |

由表 5.3 可知, 无论对于节点位移还是单元轴力, 如果仅仅取少数的主导模态, 误差是非常大的, 甚至比表 5.1 中没有考虑主导模态时的低阶模态的误差还大, 这说明即使利用应变能方法选取出来的主导模态, 依然不能选其少量的模态用来计算大跨度屋盖的 ESWL。不过对比表 5.1 和 5.3, 随着参振模态数的增加, 主导模态产生的误差较非主导模态产生的误差减小得更快, 到 4000 阶时, 误差量和没有考虑主导模态时所有 7350 阶的误差量是一致的, 这说明通过应变能方法可以过滤掉很多能量较少、不起主导作用的模态, 能够减少分析大跨度屋盖 ESWL 所需要的模态阶数。同时本章给出通过应变能选取的 4000 阶主导模态时的 ESWL 云图, 见图 5.14。

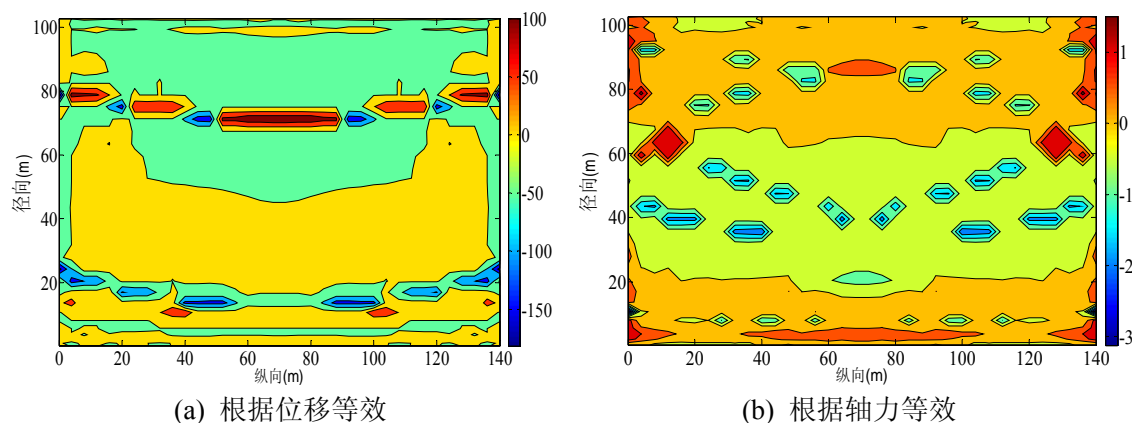


图 5.14 没有控制元素、4000 阶主导模态(通过应变能选取)时 ESWL 云图

对比图 5.7 和图 5.14, 可以发现二者是一致的, 这说明通过文献[6]方法选取主导模态来计算大跨度屋盖的 ESWL 还是可行的; 同时也说明当误差一样时, ESWL 是一样的。

同样, 本章在此也给出选出主导模态后考虑控制元素(见图 5.11 和图 5.12)时的整体误差, 见表 5.4。

表 5.4 考虑控制元素时结构主导参振模态(应变能选取)数目对整体误差的影响

| 主导<br>结构<br>模态<br>阶数 | 整体误差           |        |                |        | 主导<br>结构<br>模态<br>阶数 | 整体误差           |        |                |        |
|----------------------|----------------|--------|----------------|--------|----------------------|----------------|--------|----------------|--------|
|                      | 节点位移           |        | 单元轴力           |        |                      | 节点位移           |        | 单元轴力           |        |
|                      | $\theta$ (rad) | $e$    | $\theta$ (rad) | $e$    |                      | $\theta$ (rad) | $e$    | $\theta$ (rad) | $e$    |
| 100                  |                |        | 1.3363         | 2.9031 | 1500                 | 0.1887         | 0.1879 | 0.3628         | 0.3550 |
| 200                  | 1.4323         | 4.6003 | 0.9573         | 1.0391 | 2000                 | 0.1319         | 0.1315 | 0.3370         | 0.3307 |
| 300                  | 1.1590         | 1.7600 | 0.6999         | 0.6671 | 2500                 | 0.0630         | 0.0630 | 0.2854         | 0.2815 |
| 400                  | 0.8971         | 1.0945 | 0.6562         | 0.6214 | 3000                 | 0.0293         | 0.0293 | 0.2634         | 0.2604 |
| 500                  | 0.7457         | 0.8182 | 0.6047         | 0.5727 | 3500                 | 0.0100         | 0.0100 | 0.1751         | 0.1742 |
| 1000                 | 0.2630         | 0.2612 | 0.4177         | 0.4060 | 4000                 | 0.0000         | 0.0000 | 0.1592         | 0.1585 |

在表 5.4 中同样可以发现主导结构模态阶数对整体误差影响很大，再次证实不能选取少数模态用于计算大跨度屋盖的 ESWL；对比表 5.3 和表 5.4，参振模态的阶数较少时，存在控制元素的整体误差要大于没有控制元素时的整体误差，参振模态阶数越少，两个整体误差之间的差异越大，这与本章前文不选取结构主导模态所得出的结论是一致的。

此外在表 5.4 中，当参振主导模态数为 4000 时，整体误差基本等于表 5.3 中相应的整体误差，同时本章给出该情况下的 ESWL 云图，见图 5.15。

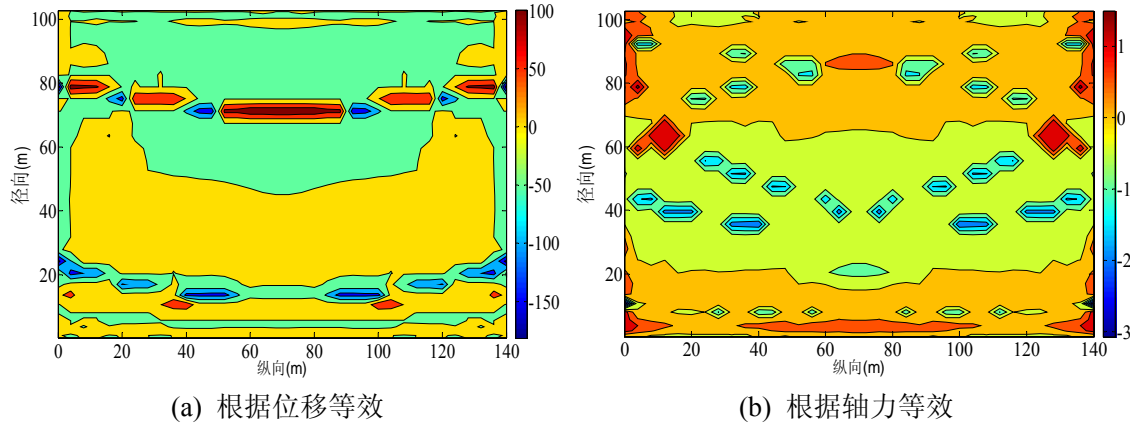


图 5.15 存在控制元素、4000 阶主导模态(通过应变能选取)时 ESWL 云图

对比图 5.7、图 5.14 和图 5.15 可知，当参振模态数足够多时，不管是否存在少数的控制元素以及通过不同方法选取的不同数量的参振模态，结构的 ESWL 是相同的或差异很小，此时可以不用选取控制元素。笔者认为，本章下文中考虑控制元素、通过 CPT 模态选取结构主导参振模态数目时对整体误差的影响有着表 5.4 相似的特征，因而不再详细阐述。

## 2) 根据脉动风场 CPT 模态选取主导结构模态

前文中谈到了根据应变能选取主导结构模态，该方法主要考虑了结构的动力特性而与激励无关。在此，本章根据脉动风场 CPT 模态来选取主导结构模态，



该方法的基本思想是根据外荷载的空间分布形状来过滤掉与之夹角较大的结构模态,从而自动选择主导结构模态,提高计算效率。该思想在计算风振位移响应时是结构经典模态分析(CMA,即模态位移叠加法)与POD理论的联合运用,因而称之为双模态变换(DMT)[12; 13],当DMT用于时域分析时,就是CMA与CPT的联合运用[12],本章只介绍离散系统这方面的知识。

在时域分析中,定义[12]:

$$B = [\Phi]^T [\phi] \quad (5.25)$$

为交叉模态参与协方差矩阵。式中,  $[\Phi]$  和  $[\phi]$  分别表示脉动风荷载 CPT 矩阵和结构模态矩阵,其中用式(5.26)来量化第  $k$  阶荷载 CPT 模态  $\{\Phi_k\}$  在第  $j$  阶结构模态  $\{\phi_j\}$  上的影响:

$$B_{k,j} = \{\Phi_k\}^T \{\phi_j\} \quad (5.26)$$

矩阵  $B$  包含许多可以忽略或几乎为零的系数。当  $B_{k,j} = 0$  时,  $\{\Phi_k\}$  与  $\{\phi_j\}$  正交,也就是说  $\{\Phi_k\}$  对  $\{\phi_j\}$  的影响很弱,  $\{\phi_j\}$  和  $\{\Phi_k\}$  是反型的[12]。因为  $\{\Phi_k\}$  表示荷载的空间分布形状,这说明荷载只能激起与它的空间分布形状不正交的结构模态  $\{\phi_j\}$ ,在用模态位移叠加法时,系统响应应是那些与  $\{\Phi_k\}$  不正交的结构模态的叠加,据此可以选出主导结构模态。

由式(5.25)和式(5.26)知:

$$B = [\{B_1\}, \{B_2\}, \dots, \{B_N\}] \quad (5.27a)$$

$$\{B_j\} = [\Phi]^T \{\phi_j\} \quad (j=1, 2, \dots, N) \quad (5.27b)$$

$$\{B_j\} = \{B_{1,j}, B_{2,j}, \dots, B_{k,j}, \dots, B_{L,j}\}^T \quad (5.27c)$$

式中,  $\{B_j\}$  表示所有  $L$  阶 CPT 模态对第  $j$  阶结构模态  $\{\phi_j\}$  的影响列向量。

定义式(5.28)为第  $j$  阶结构模态  $\{\phi_j\}$  对响应的贡献系数:

$$C_j = \text{sum}(\text{abs}(\{B_j\})) = \text{abs}(B_{1,j}) + \text{abs}(B_{2,j}) + \dots + \text{abs}(B_{L,j}) \quad (5.28)$$

式中,  $\text{sum}(\cdot)$  表示求和算子,  $\text{abs}(\cdot)$  表示绝对值算子。  $C_j$  越大,表示  $\{\phi_j\}$  的贡献越大。

利用式(5.28)可以求出所有阶数结构模态对响应的贡献系数,见图 5.16,根据该图便可以很方便地选出主导结构模态。

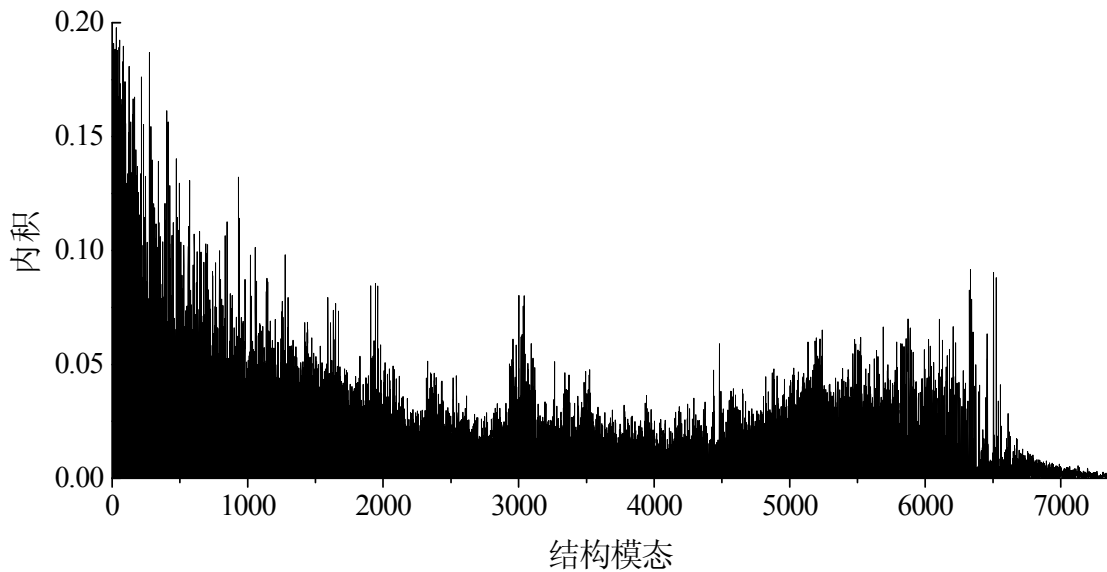


图 5.16 结构模态对响应的贡献

由图 5.16 可知，风场 CPT 模态激起大部分低、中阶模态以及部分高阶模态形成主导模态，从另外一个角度也证明了不能仅仅选用低阶模态来计算风振响应及其大跨度屋盖的 ESWL。

本章根据式(5.28)计算出所有结构模态的贡献系数  $C_j$ ，且按照其从大到小进行模态排序，选取排序后的前 100 阶、前 200 阶、前 300 阶、前 400 阶、前 500 阶、前 1000 阶、前 1500 阶、前 2000 阶、前 2500 阶、前 3000 阶、前 3500 阶、前 4000 阶等 12 种情况下的主导结构模态。然后按照本章前文中不选取结构主导模态的方法来研究参振模态对 ESWL 的影响，其不考虑控制元素时的整体误差见表 5.5。

表 5.5 没有控制元素时结构主导参振模态(CPT 模态选取)数目对整体误差的影响

| 主导<br>结构<br>模态<br>阶数 | 整体误差                 |        |                      |        | 主导<br>结构<br>模态<br>阶数 | 整体误差                 |        |                      |        |
|----------------------|----------------------|--------|----------------------|--------|----------------------|----------------------|--------|----------------------|--------|
|                      | 节点位移                 |        | 单元轴力                 |        |                      | 节点位移                 |        | 单元轴力                 |        |
|                      | $\theta(\text{rad})$ | $e$    | $\theta(\text{rad})$ | $e$    |                      | $\theta(\text{rad})$ | $e$    | $\theta(\text{rad})$ | $e$    |
| 100                  | 0.3296               | 0.3237 | 0.3849               | 0.3754 | 1500                 | 0.2022               | 0.2009 | 0.2938               | 0.2896 |
| 200                  | 0.2954               | 0.2912 | 0.3666               | 0.3584 | 2000                 | 0.1726               | 0.1717 | 0.2722               | 0.2689 |
| 300                  | 0.2857               | 0.2819 | 0.3575               | 0.3499 | 2500                 | 0.1392               | 0.1387 | 0.2509               | 0.2483 |
| 400                  | 0.2709               | 0.2676 | 0.3498               | 0.3427 | 3000                 | 0.0937               | 0.0936 | 0.2250               | 0.2232 |
| 500                  | 0.2605               | 0.2576 | 0.3437               | 0.3370 | 3500                 | 0.0593               | 0.0593 | 0.1862               | 0.1851 |
| 1000                 | 0.2266               | 0.2246 | 0.3167               | 0.3115 | 4000                 | 0.0000               | 0.0000 | 0.1583               | 0.1576 |

表 5.5 有着表 5.3 同样的特征，在此不予赘述。同样该表也说明通过 CPT 模态也能比较有效地选取出主导模态，起着结构模态降阶的作用。

对比表 5.5 和表 5.3，可以得知，当主导结构模态阶数较少时，通过 CPT 模

态选出的主导模态产生的整体误差小于通过应变能选出的主导模态产生的整体误差,而当主导结构模态阶数较多时则刚好相反,不过差异较前者小。笔者认为,造成上述差异在于通过 CPT 模态选取主导结构模态不仅考虑了结构动力特性,而且考虑了脉动风荷载的特性,而通过应变能选取主导结构模态没有考虑脉动风荷载的特性,实际上结构参振模态往往与外荷载的特性有关,对于脉动风荷载而言,CPT 模态是最能刻画其本质特性的参数。

对比表 5.5 和表 5.1 同阶数的整体误差,也可以发现通过 CPT 选取的模态产生的误差较小,笔者认为通过该种方式选取主导结构模态的物理含义更加明确。

### 5.3.4.2 利用补偿方法求解 ESWL——补偿 ESWL 的求法

对于大跨度屋盖,为了简化计算量,常常采用较少数量的结构模态进行风振响应和 ESWL 的研究,但是由本章前文可知较少数量的参振模态产生的误差很大。对此本章采用补偿方法对此缺点加以克服,使 ESWL 尽可能接近精度最高的 ESWL。需要说明的是,本章仅对不选取结构主导模态、无控制元素影响的结构前 100 阶模态的补偿 ESWL 进行研究,其余阶数模态的情况可以类推。

#### 1、基于节点位移等效的 ESWL

在传统的结构模态补偿方法中,文献[6]根据位移差进行模态补偿,本部分首先采用文献[6]方法进行模态补偿,然后求解 ESWL。针对文献[6]在进一步求解 ESWL 时不能有效解决选取少数模态后误差较大的缺点,本节基于 Householder 变换[176],采用一种新补偿方法进行 ESWL 求解。

文献[6]针对球面屋盖的风振响应,采用如下方式进行模态补偿:

$$\{\phi_{comp}\} = \frac{1}{\sqrt{\{x'\}^T [M] \{x'\}}} \{x'\} \quad (5.29)$$

式中,  $\{\phi_{comp}\}$  表示质量归一化后的补偿模态;  $[M]$  表示质量矩阵;  $\{x'\}$  补偿位移,由下式求取:

$$\{x'\} = \{x\} - \sum_{i=1}^M \{\phi_i\} q_i \quad (5.30)$$

式中,  $\{x\}$  表示总位移列向量,在本章中指的是式(5.2)的位移等效目标响应;

$\sum_{i=1}^M \{\phi_i\} q_i$  表示  $M$  ( $M \ll N$ ) 阶模态位移的叠加结果,其中组合系数  $q_i$  ( $i=1,2,\dots,M$ ) 由本章前文介绍的数值方法求得。

补偿模态的广义坐标为:

$$q_{comp} = \sqrt{\{x'\}^T [M] \{x'\}} \quad (5.31)$$

补偿模态  $\{\phi_{comp}\}$  相应的补偿圆频率为：

$$\omega_{comp} = \frac{\{\phi_{comp}\}^T [K] \{\phi_{comp}\}}{\sqrt{\{\phi_{comp}\}^T [M] \{\phi_{comp}\}}} \quad (5.32)$$

利用结构模态的正交性，容易验证由式(5.29)求得的  $\{\phi_{comp}\}$  和  $M$  阶参振模态之间是彼此关于体系的质量矩阵  $[M]$  和刚度矩阵  $[K]$  正交的。

本章首先根据式(5.29)~式(5.32)求出补偿参数后，便可利用式(5.4)求解 ESWL，只不过此时需要考虑  $\{\phi_{comp}\}$ 、 $\omega_{comp}$  和  $q_{comp}$  的影响，即考虑模态补偿后基于节点位移  $\{r_d\}$  的惯性力组合法所得的 ESWL 可表示为：

$$\{p_e\} = \sum_{j=1}^M [M] \omega_j^2 q_j \{\phi_j\} + [M] \omega_{comp}^2 q_{comp} \{\phi_{comp}\} \quad (5.33a)$$

或：

$$\{p_e\} = [M] \left[ \phi, \{\phi_{comp}\} \right] \text{diag} \left( \omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_M^2, \omega_{comp}^2 \right) \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_M \\ q_{comp} \end{Bmatrix} \quad (5.33b)$$

在式(5.33)中，补偿 ESWL 为：

$$\{p_{e,comp}\} = [M] \{\phi_{comp}\} \omega_{comp}^2 q_{comp} \quad (5.34)$$

根据式(5.33)求出 ESWL，再计算此时的整体误差为  $\theta = 1.0017$  和  $\theta = 15.0076$ ，远大于表 5.1 中相应的误差，同时本章也给出该种情况下的 ESWL 云图，见图 5.15。

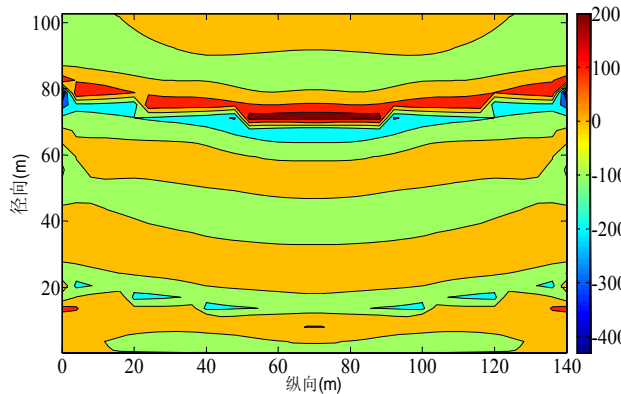


图 5.17 没有控制元素的前 100 阶模态、基于文献[6]模态补偿且根据节点位移等效时 ESWL 云图

对比图 5.7(a)和图 5.17 可知二者之间的差异很大，这说明当只取少数结构模态，采用文献[6]方法考虑模态补偿来求解基于节点位移等效的 ESWL 是不准确

的。究其原因,虽然 $\{\phi_{comp}\}$ 和 $M$ 阶参振模态之间是彼此关于结构的质量矩阵 $[M]$ 和刚度矩阵 $[K]$ 正交的,但是 $[K]\{\phi_{comp}\} \neq \omega_{comp}^2 [M]\{\phi_{comp}\}$ ,也就是说向量 $[K]\{\phi_{comp}\}$ 和 $\omega_{comp}^2 [M]\{\phi_{comp}\}$ 并不完全重合,二者之间存在一定的角度,这说明 $\{\phi_{comp}\}$ 并不是结构的真正的模态,因而在用惯性力组合法求解ESWL时是不正确的。正如Bathe[144; 146]指出:结构模态(特征向量)关于质量矩阵 $[M]$ 和刚度矩阵 $[K]$ 正交是必要条件,而非充分条件。

由本章前文可知,造成ESWL如此大的误差在于 $[K]\{\phi_{comp}\}$ 和 $\omega_{comp}^2 [M]\{\phi_{comp}\}$ 并不完全重合,二者之间存在一定的角度,在此本章采用矩阵论中的一种初等反射变换——Householder变换[176]使二者完全重合,进而求解 $\{p_{e,comp}\}$ 和 $\{p_e\}$ ,具体步骤如下(式中相关符号同前文):

- 1) 构造非零列向量 $\{y\}$ :

$$\{y\} = [K]\{\phi_{comp}\} \quad (5.35)$$

- 2) 构造单位列向量 $\{z\}$ :

$$\{z\} = \frac{[M]\{\phi_{comp}\}}{\text{norm}([M]\{\phi_{comp}\})} \quad (5.36)$$

式中,  $\text{norm}$ 表示求向量的模。

- 3) 再次构造单位列向量 $\{u\}$ :

$$\{u\} = \frac{\{y\} - \text{norm}(\{y\})\{z\}}{\text{norm}(\{y\} - \text{norm}(\{y\})\{z\})} \quad (5.37)$$

- 4) 则存在Householder矩阵 $[H]$ 为:

$$[H] = I - 2\{u\}\{u\}^T \quad (5.38)$$

使得:

$$[H]\{y\} = \text{norm}(\{y\})\{z\} \quad (5.39)$$

- 5) 要想 $[K]\{\phi_{comp}\}$ 和 $\omega_{comp}^2 [M]\{\phi_{comp}\}$ 完全重合,而 $[K]$ 、 $[M]$ 和 $\{\phi_{comp}\}$ 已由前面求出,显然此时的 $\omega_{comp}^2$ 不再是一个值,而是一个矩阵,本章称为补偿圆频率平方矩阵 $[\omega_{comp}^2]$ ,这是与文献[6]的最大不同之处。把式(5.35)~式(5.38)代入式(5.39)可得 $[\omega_{comp}^2]$ :

$$[\omega_{comp}^2] = \frac{\text{inv}([H]) \times \text{norm}(\{y\})}{\text{norm}([M]\{\phi_{comp}\})} \quad (5.40)$$

式中， $inv$ 表示求逆矩阵。

6) 补偿的 ESWL 为：

$$\{p_{e,comp}\} = [\omega_{comp}^2][M]\{\phi_{comp}\} \quad (5.41)$$

7) 则总的 ESWL 为：

$$\{p_e\} = [M][\phi]diag(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_M^2) \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_M \end{Bmatrix} + \{p_{e,comp}\} \quad (5.42)$$

根据上述步骤可以方便地求出基于式(5.2)所得节点位移等效的 ESWL，此时的整体误差为 $\theta = 0$ 和 $e = 0$ 及其 ESWL 云图，见图 5.18。

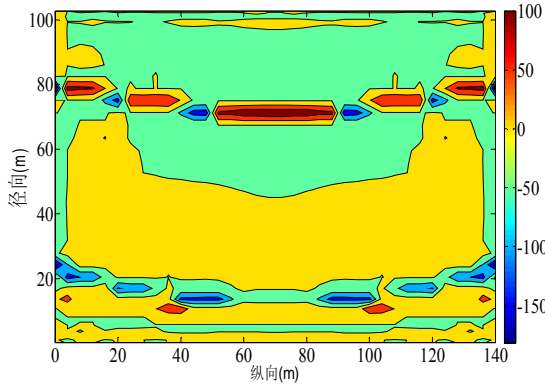


图 5.18 没有控制元素的前 100 阶模态、根据本章方法考虑补偿 ESWL 的且根据节点位移等效时 ESWL 云图

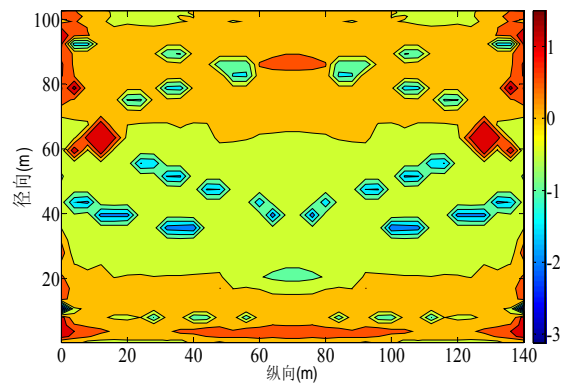


图 5.19 没有控制元素的前 100 阶模态、根据本章方法考虑补偿 ESWL 的且根据单元轴力等效时 ESWL 云图

对比图 5.7(a)和图 5.18，二者完全一致，显然根据本章方法算出的 ESWL 是完全精确的，进而证明本章方法的有效性。

## 2、基于单元轴力等效的 ESWL

根据式(5.29)构造的 $\{\phi_{comp}\}$ 仅适合于节点位移，对单元轴力并不适合，本节依然采用一种新的方法——补偿方法来解决此问题。当仅仅考虑较少数量的结构模态时，本章采用如下步骤计算 ESWL：

- 1) 根据式(5.8)计算出只考虑较少数量结构模态的单元轴力响应 $\{r_1\}$ ，其中求解组合系数 $\{c\}$ 时，采用本章前文介绍的数值计算方法。
- 2) 计算轴力的补偿响应：

$$\{r_{comp}\} = \{r\} - \{r_1\} \quad (5.43)$$

- 3) 根据式(5.10)求出补偿 ESWL 为：

$$\{p_{e,comp}\} = [I_r]^+ \{r_{comp}\} \quad (5.44)$$

式中,  $[I_r]^+$  表示  $[I_r]$  的 Moore-Penrose 广义逆。

4) 则总的 ESWL 为:

$$\{p_e\} = [M][\phi] \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_M^2) \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_M \end{Bmatrix} + \{p_{e,comp}\} \quad (5.45)$$

根据上述步骤可以方便地求出基于式(5.2)所得单元轴力等效的 ESWL, 此时的整体误差为  $\theta = 0.1583$  和  $\theta = 0.1576$  及其 ESWL 云图, 见图 5.19。

对比图 5.7(b)和图 5.19, 二者也完全一致, 因此根据本章方法算出的 ESWL 精度最高, 进而证明本章方法的有效性。

## 5.4 与结构模态无关而仅与风场 CPT 模态有关的 ESWL 研究

由本章前文的计算可知, 在用惯性力组合法来计算大跨度屋盖 ESWL 时, 参振模态的选取对结果的影响比较大。如果参振模态的数量不够且不考虑补偿时, 误差往往比较大, 因而存在着一定的缺陷, 需要探究更加精确的、简单的方法来研究大跨度屋盖 ESWL, 由第 1 章绪论可知文献[84; 85]的采用与结构振动模态无关而与风场 CPT 模态有关的 ESWL 计算方法不失为一种可行的方法, 不过该方法同样存在着一定缺陷。对此, 本章将采用 CPT 风场模态补偿理论来克服文献[84; 85]方法的缺陷, 提出一种新的、更加准确的方法来研究复杂大跨度屋盖的 ESWL。其中应用到的等效目标响应依然采用式(5.2)确定。

### 5.4.1 新的脉动风 ESWL 计算方法

大跨度屋盖常借助风洞试验来研究它的 ESWL, 由第 2 章分析可知 CPT 模态数等于试验时的独立测点数。由于设备条件的限制, 独立测点数往往远小于结构节点数。如果脉动风场为结构自由节点上的三维空间压力场, 此时由第 2 章知识可知 CPT 模态矩阵  $[\Phi]$  便是一个行数远大于列数的列满秩矩阵, 因为  $[\Phi]$  的每个列向量——本征模态彼此之间是正交的, 也是线性无关的。再左乘一个行数不小于列数的列满秩矩阵  $[I_r]$ , 则由式(1.10)可知  $[R_0]$  为一个行数远大于列数的列满秩矩阵, 显然式(1.10)属于一个超定方程组, 用本章前文介绍的最小二乘法求解方程时只能得到  $\{C\}$  的近似解, 因而式(1.9)只能求得  $\{P_e\}$  的近似值, 本章将对文献[84; 85]方法进行改进, 建立起新的脉动风 ESWL 计算方法。

由第 1 章绪论可知, 文献[84; 85]计算 ESWL 的方法如下:

$$\{P_e\} = [\Phi]\{C\} \quad (1.9)$$

式中,  $\{P_e\}$  表示一致静力等效风荷载,  $[\Phi]$  表示脉动风场的 CPT 本征模态, 其中

列向量为CPT模态，表示荷载的空间分布形式； $\{C\}$ 表示贡献系数列向量，由下式进行求解[84; 85]：

$$\{r_o\} = [I_r][\Phi]\{C\} = [R_0]\{C\} \quad (1.10)$$

式中， $\{r_o\}$ 表示所有结构单元的最大荷载效应； $[I_r]$ 表示影响函数矩阵，其中列向量为单位力引起的响应，如果 $\{r_o\}$ 为节点位移等效目标响应， $[I_r]$ 便为结构柔度矩阵。

本章采用如下方式对文献[84; 85]方法进行改进，具体步骤如下(式中符号同前)：

1) 已知初始等效目标响应 $\{r_o\}$ 、影响函数矩阵 $[I_r]$ 和脉动风场的 CPT 模态矩阵 $[\Phi]$ ，先用最小二乘法对式(1.10)进行求解，结果记作 $\{C_1\}$ ；

2) 把 $\{C_1\}$ 回代入式(1.10)，求出结构响应，记作 $\{r_{o,1}\}$ ：

$$\{r_{o,1}\} = [I_r][\Phi]\{C_1\} = [R_0]\{C_1\} \quad (5.46)$$

3) 求出等效目标响应补偿值：

$$\{r_{o,comp}\} = \{r_o\} - \{r_{o,1}\} \quad (5.47)$$

4) 根据式(1.10)中的第一个等式构造风场的补偿模态 $\{\Phi_{comp}\}$ 和补偿贡献系数 $C_{comp}$ ：

$$\{\Phi_{comp}\} = [I_r]^+ \cdot \{r_{o,comp}\} / C_{comp} \quad (5.48a)$$

$$C_{comp} = norm\left([I_r]^+ \cdot \{r_{o,comp}\}\right) \quad (5.48b)$$

5) 把式(5.48)中得到的补偿模态 $\{\Phi_{comp}\}$ 和补偿贡献系数 $C_{comp}$ 分别加进 $[\Phi]$ 和 $\{C_1\}$ ，得到总脉动风场模态矩阵 $[\Phi_t]$ 和总贡献系数列向量 $\{C_t\}$ ：

$$[\Phi_t] = \left[ [\Phi], \{\Phi_{comp}\} \right] \quad (5.49a)$$

$$\{C_t\} = \left\{ \begin{array}{l} \{C_1\} \\ C_{comp} \end{array} \right\} \quad (5.49b)$$

6) 利用总脉动风场模态矩阵 $[\Phi_t]$ 和总贡献系数列向量 $\{C_t\}$ 便可以求出新的脉动风 ESWL 为：

$$\{P_e\} = [\Phi_t]\{C_t\} \quad (5.50)$$

7) 其中，补偿 ESWL 部分为：

$$\{p_{e,comp}\} = \{\Phi_{comp}\} C_{comp} \quad (5.51)$$

## 5.4.2 算例验证与分析



本节仍然采用 5.3 节中的算例进行分析, 对本章方法和文献[84; 85]方法进行对比分析, 以验证本章方法的有效性。

### 5.4.2.1 误差分析

在分析误差之前, 先对ESWL计算中的相关参数的特点做一个说明。由于结构对称以及测压点位置对称, 由图2.4可知结构左、右半边部分的风压以中轴线而完全对称, 因此试验时可只测量半边结果, 根据对称性便得到另外一半的结果, 此时独立测点数为108, 因而CPT模态数也为108个; 风荷载按照三维方向作用在2450个自由节点上, 形成一个列满秩的CPT模态矩阵 $[\Phi] \in R^{7350 \times 108}$ ; 节点位移的影响函数矩阵为 $[I_r] \in R^{7350 \times 7350}$ , 单元轴力的影响函数矩阵为 $[I_r] \in R^{10080 \times 7350}$ , 二者均为列满秩。

本章首先从风洞试验结果计算出实际结构自由节点上脉动风的三维风场, 并根据第2章知识计算出脉动风场的CPT模态矩阵。同时计算出节点位移和单元轴力响应, 并按照式(5.2)求出两种响应的初始等效目标响应。然后分别用文献[84; 85]方法和本章方法计算节点位移响应和单元轴力响应对应的ESWL。最后求出在两种方法下的整体误差, 以此来验证两种方法的精度。此处的定量误差分析仍然采用式(2.36)夹角 $\theta$ 和式(2.38)相对误差 $e$ 两个参数。

#### 1、整体误差分析

本章对两种不同方法造成的整体误差进行了计算, 结果见表5.6。

表 5.6 两种不同方法的整体误差

| 响应 \ 误差        | 文献[84; 85]方法 |        | 本章方法   |        |
|----------------|--------------|--------|--------|--------|
|                | 节点位移         | 单元轴力   | 节点位移   | 单元轴力   |
| $\theta$ (rad) | 0.3765       | 0.3833 | 0.0000 | 0.1583 |
| $e$            | 0.3677       | 0.3740 | 0.0000 | 0.1576 |

由表5.6可知, 无论是节点位移还是杆单元轴力, 本章方法误差均远小于文献[84; 85]方法, 说明本章方法算出的ESWL精度更高。由前面分析可知本结构的CPT模态矩阵和影响函数矩阵的特点对于文献[84; 85]方法来说是求不出高精度的贡献系数, 因而造成了响应的较大的误差, 显然ESWL精度较低; 而本章对此误差进行了一定程度的补偿, 较好地克服了文献[84; 85]方法的缺陷, 算出的ESWL精度较高。

由表5.6还可以看出, 本章方法算出的ESWL作用下的节点位移和相应初始等效目标响应之间没有误差, 表明本章方法中基于节点位移等效所求得的ESWL是完全精确的, 原因在于位移影响函数矩阵是一个可逆方阵, 在用式(5.48a)构造补偿模态时可以求得精确解; 而本章方法算出的ESWL作用下的单元轴力和相

应初始等效目标响应之间存在一定的误差，反映了基于单元轴力等效算出的 ESWL 并不是精确解，原因在于轴力影响函数矩阵并不是一个可逆方阵，在用式 (5.48a)构造补偿模态时只能求得其近似解，最终的 ESWL 也只能是一种近似结果。

同时对表5.1、表5.3、表5.5和表5.6可知，就整体误差而言，本章方法计算结果实际上就相当于惯性力组合方法中考虑了所有结构振动模态或所有主导结构模态的结果。

## 2、局部误差分析

在本节中，依然采用本章前文的方法分析图 5.4 所示最大响应的局部误差，进一步对文献[84; 85]方法、本章方法进行比较，结果见图 5.20。

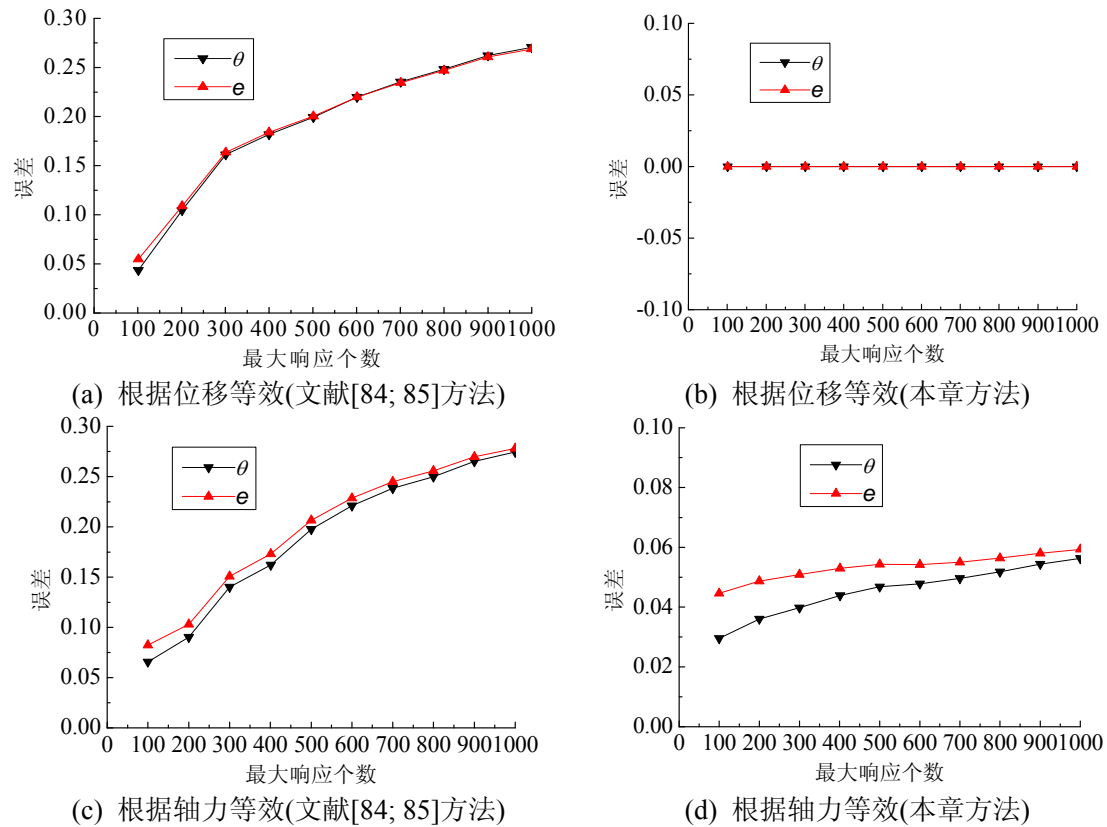


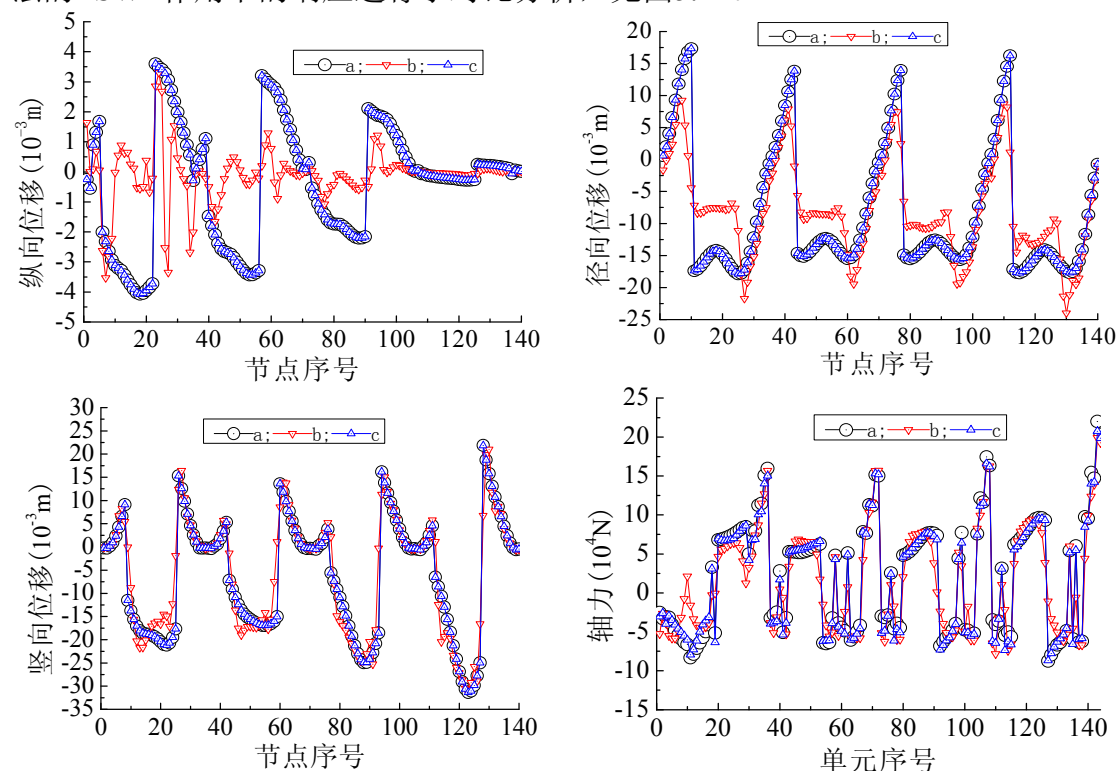
图 5.20 局部误差对比分析

由图 5.20 可知：对所关注的一定数量的最大响应而言，文献[84; 85]方法所产生的误差几乎随着最大响应个数的增加而呈快速的线性增长趋势，文献[84; 85]方法只对很少的一部分较大响应精度稍好，而对绝大多数最大响应并不适合；而在本章方法中，最大响应个数对于节点位移的误差没有任何影响，始终为零，对于单元轴力，最大响应个数对于其误差影响较小。上述特征进一步说明本章方法的有效性，进一步说明文献[84; 85]方法适于结构简单、响应数量较少的大跨度

屋盖；对于结构复杂、响应很多的大跨度屋盖，本章方法更加适合求解脉动风荷载的ESWL。

### 3、部分节点和单元响应对比分析

在本节中同样对图5.3所示的部分节点和单元的初始等效目标响应和两种方法的ESWL作用下的响应进行了对比分析，见图5.21。



注：a 表示由式(5.2)计算得到的初始等效目标响应；b 表示在文献[84; 85]的 ESWL 作用下的响应；c 表示在本章方法的 ESWL 作用下的响应。

图 5.21 上表面部分节点和单元响应对比分析

由图 5.21 明确地看出：无论是(绝对值)较大响应，还是(绝对值)较小响应，本章方法算出的 ESWL 作用下的响应和初始等效目标响应之间的差异均较文献 [84; 85]方法小，这与表 5.6 的结果是一致的。进一步说明本章方法算出的 ESWL 更加精确和可靠。

同时对比图5.6和图5.21，可以进一步知道本章方法相当于惯性力组合方法中考虑了所有结构振动模态。

#### 5.4.2.2 ESWL 分布分析

##### 1、文献[84; 85]方法和本章方法的 ESWL 对比分析

为了进一步对比分析，本章也给出两种方法算出的 ESWL 云图，见图 5.22。

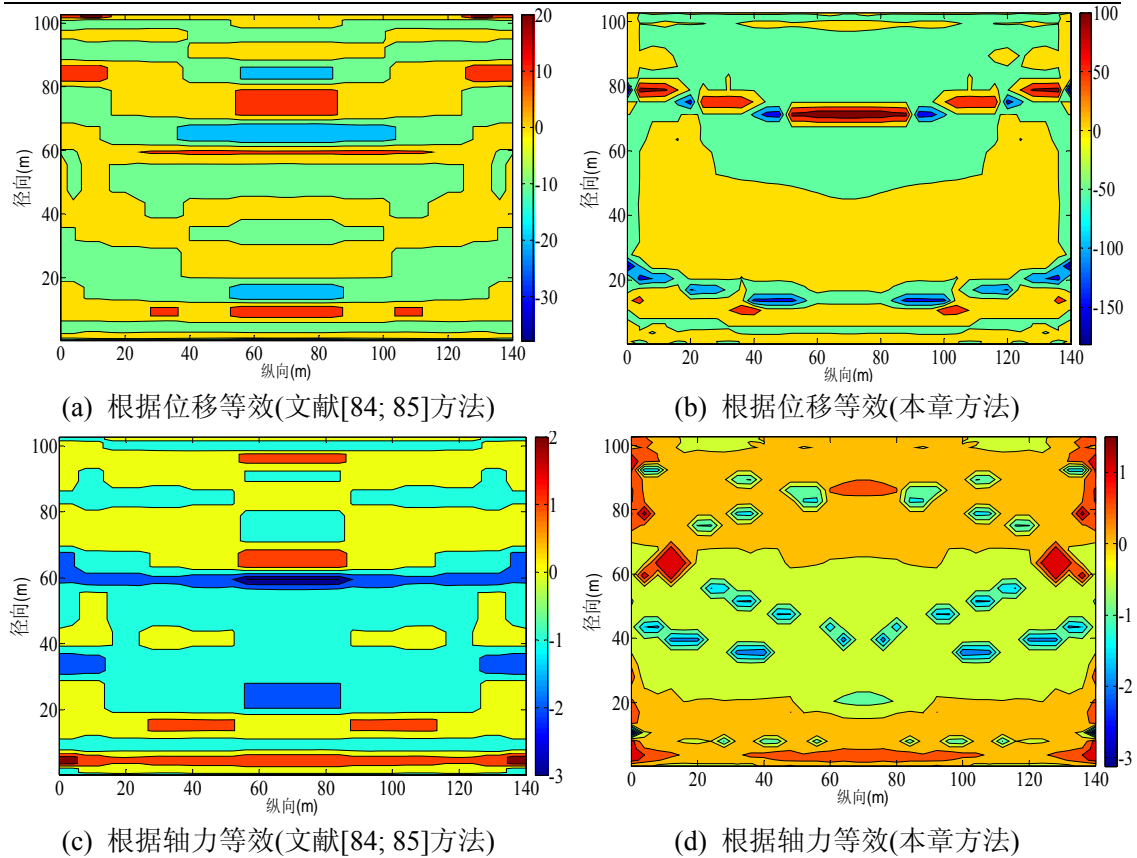


图 5.22 通过 CPT 模态计算得到的 ESWL 云图

由图 5.22 同样可以知道, ESWL 是关于径向中轴线对称分布的, 这与试验时外荷载的对称性是一致的; ESWL 的差异比较大, 再次从侧面证实由式(5.2)得到的不同初始等效目标响应之间是彼此独立的; 此外根据节点位移等效算出的 ESWL 总体上大于根据单元轴力等效算出的 ESWL, 本结构的 ESWL 宜采用前者的计算结果。这些特征与图 5.7 是一致的。

同时对比图5.7、图5.14、图5.15和图5.22(b)、(d), 同样可以确知本章方法与惯性力组合方法中考虑了所有结构振动模态或足够数量主导结构模态的结果完全吻合, 显然本章计算方法更加准确。

## 2、整体误差相同时, 惯性力组合方法和文献[84; 85]方法的 ESWL 对比分析

5.3 节已经谈到, 当整体误差一样时, ESWL 是一样的, 但是需要注意的是所采用的方法均为惯性力组合法。在此, 有必要对虽然整体误差相同但计算方法不同算出的 ESWL 是否相同进行分析。限于篇幅, 本章对表 5.6 中文献[84; 85]方法产生的误差对应的惯性力组合法的 ESWL 进行分析, 其中的研究对象为不选取结构主导模态且无控制元素影响的情况, 其 ESWL 见图 5.23。

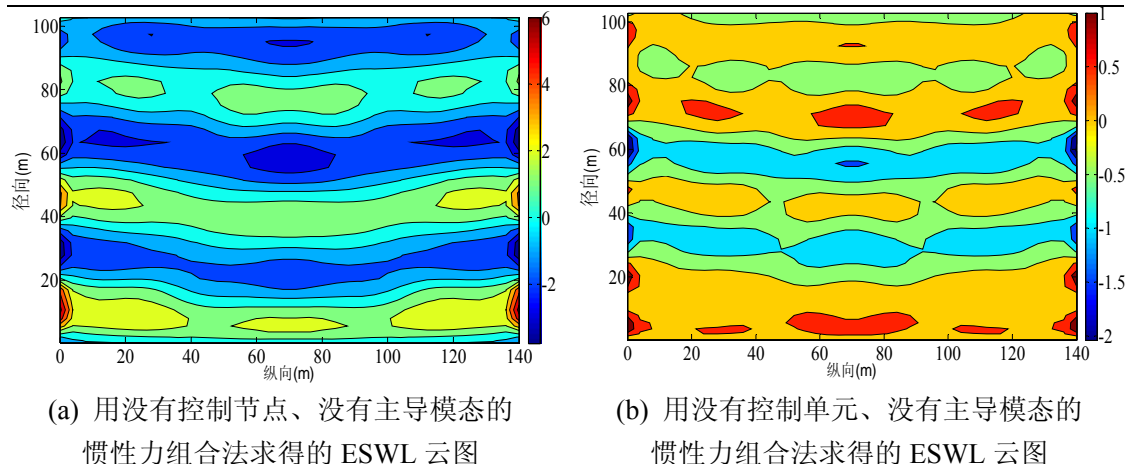


图 5.23 整体误差和文献[84; 85]方法相同时的惯性力组合法所得的 ESWL 云图

首先需要说明的是，图 5.23(a)采用结构前 115 阶模态，其整体误差为  $\theta = 0.3762$ ， $e = 0.3673$ ，而图 5.23(b)采用结构前 240 阶模态，其整体误差为  $\theta = 0.3833$ ， $e = 0.3740$ ，和表 5.6 中对应的误差相差很小或完全相等。但是对比图 5.22(a)和图 5.23(a)以及对比图 5.22(c)和图 5.23(b)，发现虽然整体误差相差无几，但是 ESWL 相差较大。这说明尽管等效目标响应和整体误差相同，但是采用不同方法算出的 ESWL 可以不同。

### 5.4.2.3 其它问题对 ESWL 的影响

#### 1、风场 CPT 模态的降阶对 ESWL 的影响

在前面用风场 CPT 模态计算 ESWL 中，本章考虑了所有 108 阶 CPT 模态的影响。第 2 章已经谈到：对于脉动风场，第一阶 CPT 模态在风场中的贡献并不显著，常常需要考虑多阶 CPT 模态甚至中高阶 CPT 模态的影响。在本节中，有必要来具体研究风场 CPT 模态的降阶对 ESWL 的影响。

本章对取第 1 阶、前 10 阶、前 20 阶、前 30 阶、前 40 阶、前 50 阶、前 60 阶、前 70 阶、前 80 阶、前 90 阶、前 100 阶 CPT 模态 11 种情况进行对比分析。计算在这 11 种情况下用文献[84; 85]方法和本章方法所造成的节点的三维位移和所有单元轴力的初始等效目标响应和在 ESWL 作用下响应之间的整体误差，整体误差结果见图 5.24。

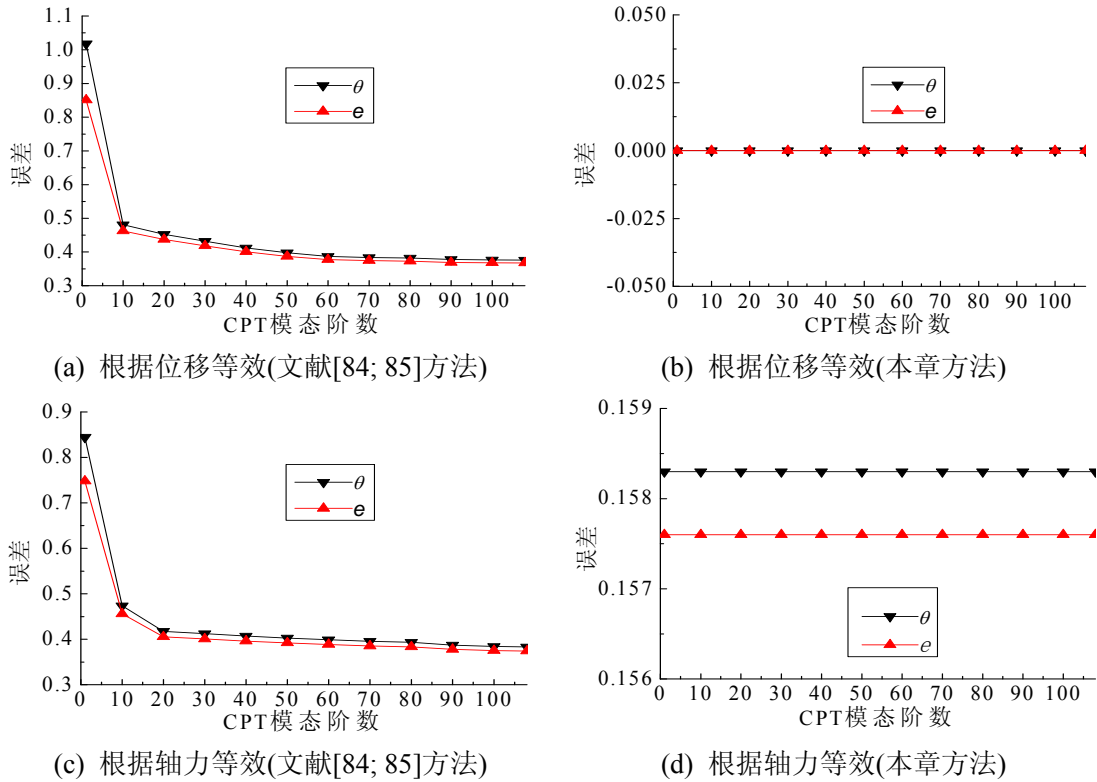


图 5.24 风场 CPT 模态的降阶对 ESWL 的影响

由图 5.24 可知：当用文献[84; 85]方法计算 ESWL 时，CPT 模态阶数的选取对 ESWL 的精度影响较大，显然不能仅选取第一阶模态来计算 ESWL，需要考虑中、低阶模态的影响，高阶模态影响较小；而用本章方法计算 ESWL 时，CPT 模态阶数的数量对 ESWL 是没有影响的，因为本章方法对文献[84; 85]方法产生的误差进行了很好的补偿，尤其是位移响应则进行了全部的补偿。上述特点进一步说明本章方法更加适于大跨度屋盖脉动风 ESWL 的计算。

## 2、修正轴力影响函数矩阵对 ESWL 的影响

由前面分析可知，本章方法在计算基于单元轴力的 ESWL 时，存在一定的误差，其根本原因在于轴力影响函数矩阵并不是一个可逆方阵，用式(5.48a)不能构造出精确的补偿模态。因为矩阵的行向量组的秩(简称行秩)与列向量组的秩(简称列秩)相等[176]，而本章所定义的影响函数是一个列满秩矩阵。据此本章在最初的影响函数矩阵  $[I_r] \in R^{10080 \times 7350}$  的 10080 个行向量中挑选出 7350 个行向量构成一个最大的向量无关组，从而形成唯一的可逆轴力影响函数矩阵  $[I_{r,m}] \in R^{7350 \times 7350}$  (本章中称为修正轴力影响函数矩阵)，然后用[84; 85]方法和本章方法对前面算例的大跨度屋盖的 ESWL 进行研究，并比较在两种方法下不同响应(最大无关组响应、整体响应)的误差和 ESWL 分布，分别见表 5.7 和图 5.25。

表 5.7 修正轴力影响函数矩阵所造成的轴力响应误差

| 响应<br>误差       | 文献[84; 85]方法 |        | 本章方法    |         |
|----------------|--------------|--------|---------|---------|
|                | 最大无关组响应      | 整体响应   | 最大无关组响应 | 整体响应    |
| $\theta$ (rad) | 0.4771       | 0.4245 | 0       | 1.6045  |
| $e$            | 0.4592       | 0.4125 | 0       | 64.9089 |

需要说明的是,表 5.7 中最大无关组响应指的是  $[I_{r,m}]$  对应的 7350 个单元(上表面单元见图 5.25)轴力,整体响应指的是  $[I_r]$  对应的 10080 个单元(即所有单元)轴力。由表 5.7 可知:对于基于修正轴力影响函数矩阵求得的 ESWL,文献[84; 85]方法对不同对象响应的误差都比较大,甚至比表 5.1 中相应的误差还大;本章方法虽然对于最大无关组响应没有误差,但是对于整体响应产生的误差却非常大,也就是说本章方法对于非最大无关组对应单元响应产生了很大的误差,而这些单元的数量较多(有 2730 个),只是关注最大无关组单元而忽视非最大无关组单元显然是不合适的,因而这样的 ESWL 并不是一种合理的 ESWL。

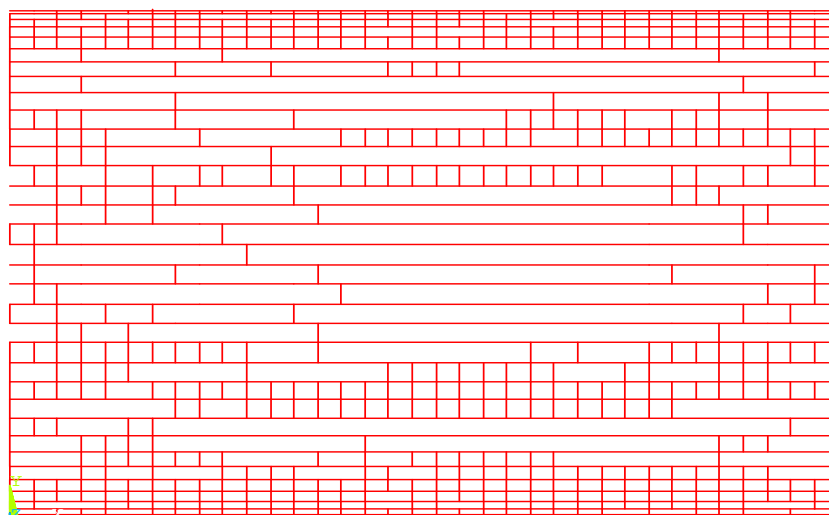


图 5.25 最大无关组单元中的上表面单元

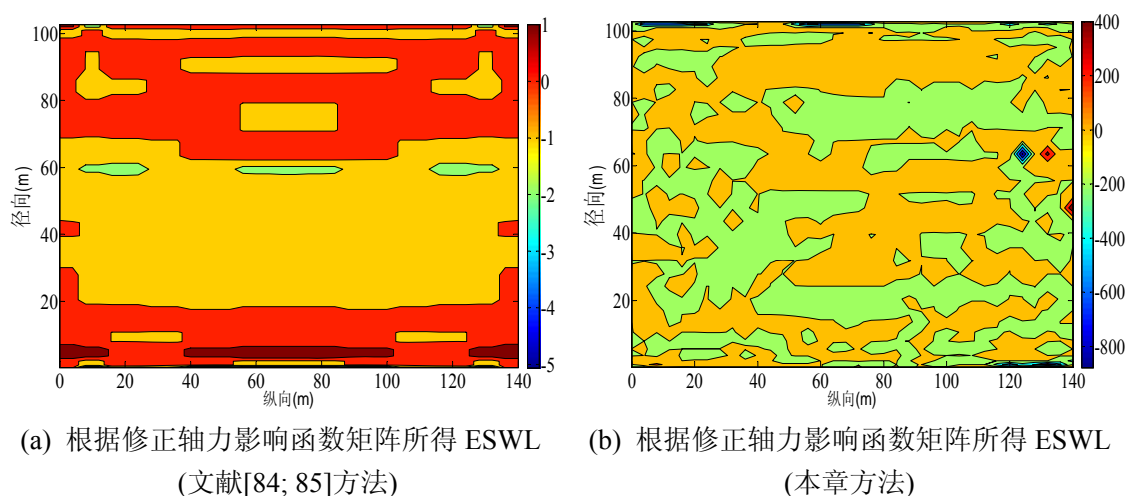
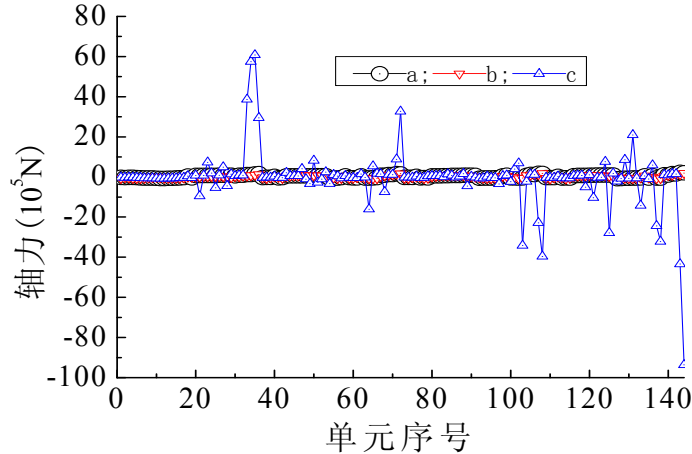


图 5.26 根据修正轴力影响函数矩阵所得的 ESWL 云图(KPa)

在图 5.26 中，由本章方法算出的 ESWL 并不关于径向中轴线对称，且在局部区域出现很大的风压值，显然这些特征均是不合理的，这也与上述进行量化的误差特征是一致的。

此外，本章在此同样对图 5.3 所示的上表面部分单元的初始等效目标响应和两种方法的 ESWL 作用下的响应进行了对比分析，见图 5.27。



注：a 表示由式(5.2)计算得到的初始等效目标响应；b 表示在文献[84; 85]的 ESWL 作用下的响应；c 表示在本章方法的 ESWL 作用下的响应。

图 5.27 考虑修正轴力影响函数矩阵时上表面部分单元响应对比分析

由图 5.27 可知，当考虑修正轴力影响函数矩阵时，本章方法算出的 ESWL 作用下的响应和初始等效目标响应之间的差异较文献[84; 85]方法大，这与表 5.7 和图 5.26 的分析结果是一致的。

通过上述误差分析，对于类似算例所示的复杂大跨度屋盖，不宜采用修正轴力影响函数矩阵来对基于轴力响应的 ESWL 进行研究，这对基于其它内力响应的 ESWL 研究也有借鉴意义。

### 3、根据轴力等效且考虑单元控制元素影响时本章方法对 ESWL 的影响

在 5.3 节中，我们已经得知控制元素对 ESWL 存在一定的影响。在根据节点位移等效求解 ESWL 时，本章方法能够求得精确解，因此没有必要考虑节点控制元素对 ESWL 的影响。而根据单元轴力等效求解 ESWL 时，本章方法不能求得精确解，对此本章在此仅研究如果考虑单元控制元素影响时本章方法对 ESWL 的影响。

首先由式(5.49a)求出总脉动风场模态矩阵 $[\Phi_i]$ ，然后根据本章前文所介绍的等式约束最小二乘方法求出总贡献系数列向量 $\{C_i\}$ ，再根据式(5.50)求解脉动风 ESWL。在此需要指出的是，为了满足 LSE 问题有唯一解的条件式(5.20)，本章只对图 5.12 中的 100 个控制单元进行研究，整体误差为：夹角 $\theta = 1.4074$ ，相对



误差  $e = 74.2443$ 。其 ESWL 见图 5.28。

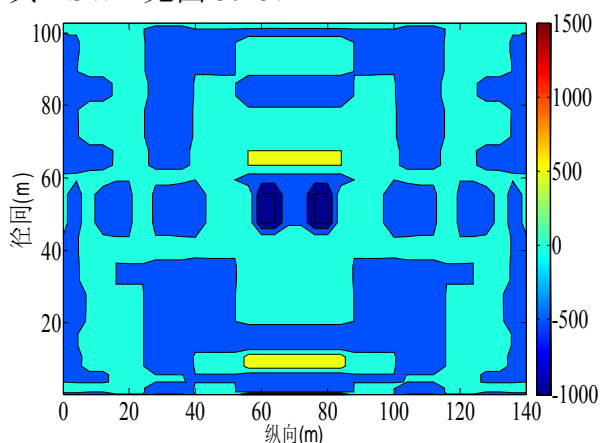


图 5.28 根据轴力等效且考虑单元控制元素影响时本章方法的 ESWL 分布

由上面分析可知，根据轴力等效且考虑单元控制元素影响时，不宜采用本章方法计算 ESWL。

## 5.5 本章小结

本章结合工程实际，主要就非常复杂的大跨度屋盖脉动风荷载的 ESWL 采用两种不同方法进行了对比研究，主要的研究成果可以概括如下：

- 1) 在利用惯性力组合法求解大跨度屋盖的 ESWL 时，无论是否存在控制元素，宜考虑足够数量的结构参振模态，不宜考虑少数结构参振模态，否则误差较大。如果选取的结构参振模态足够多，基于所有节点位移的 ESWL 可以得到精确值，没必要选取控制节点；而基于所有单元内力的 ESWL 是不能得到精确值，可以选取一些控制单元，不过少数控制单元的选取对 ESWL 精度的影响不大，此时也可以不用选取控制单元。
- 2) 在利用惯性力组合法求解大跨度屋盖的 ESWL 时，当选择的结构参振模态数量较少时，可以采用补偿方法求得和考虑所有参振模态一样的结果。
- 3) 如果采用本章的等效目标响应时，文献[84; 85]方法适于结构简单、响应数量较少的大跨度屋盖的 ESWL；对于结构非常复杂、响应很多的大跨度屋盖，本章的 CPT 风场模态补偿理论更加适合求解 ESWL。
- 4) 惯性力组合法与采用与结构振动模态无关而仅与风场 CPT 模态有关的方法相比，本章的风场 CPT 模态补偿方法相当于考虑了所有阶结构模态的结果，更加适合求解大跨度屋盖脉动风荷载的 ESWL。
- 5) 本章的风场 CPT 模态补偿方法是一种比较通用的方法，它不仅适用于求解复杂大跨度屋盖的 ESWL，而且对于其它形式的复杂结构的 ESWL，也同样可以采用该方法来进行计算。

## 第 6 章 总结与展望

本章作为本论文的收尾章节，主要包括两部分：总结本文主要研究内容和研究过程中得到的一些结论；根据作者目前对研究内容的认识提出以后工作的建议。

### 6.1 本文工作总结

本文首先对大跨度屋盖风致响应研究进展和大跨度屋盖 ESWL 的研究进行了较为详细地回顾和评述。随后将 POD 展开技术中的 CPT 理论进行了详细地阐述，以便为本文的大跨度屋盖脉动风 ESWL 的研究内容作好铺垫。然后以预应力鞍形索网屋盖为例，采用传统有限元理论对大跨度屋盖中的几何非线性问题——结构找形和风致响应进行研究。最后采用了传统的惯性力组合法和与结构振动模态无关而仅与风场 CPT 模态有关的方法对大跨度屋盖脉动风 ESWL 进行研究。

通过严格的理论推导与算例分析，本文得到了如下的主要成果和结论：

#### 6.1.1 本征正交分解法在风荷载特性分析上的应用

结合工程实际，本部分主要对整体风场和脉动风场的 CPT 理论进行比较详细的对比分析，为后续章节奠定了坚实的基础，得到了如下一些结论：

- CPT 技术有助于对复杂时空变化的随机风场理解，采用新的坐标系从不同的角度描述风场，表明 CPT 技术是分析随机风场的有效手段。
- 整体风场的第一阶 CPT 模态贡献非常显著，往往在风场重构时只需考虑第一阶 CPT 模态的影响，从而会过分强调和依赖于第一阶 CPT 模态的作用。而脉动风场的第一阶 CPT 模态在风场中的贡献并不显著，常常需要考虑多阶 CPT 模态甚至中高阶 CPT 模态的影响。
- 考虑风场的 CPT 模态贡献，常常仅从本征值所占比例的大小出发。建议不要仅仅局限于本征值，可以综合其它相关参数一起分析，有助于正确理解应用于 CPT 分析中的风场。
- 因为主坐标函数的性质比较简单，在利用 CPT 模态对风场性质进行研究的同时，也可借助主坐标的性质来研究复杂风场的性质。

#### 6.1.2 大跨度屋盖几何非线性问题的研究

在大跨度屋盖中，预应力索网结构是一种应用较为广泛的结构形式，其几何

非线性表现特征比较明显，在结构计算时需要考虑它的影响。本文对大跨预应力索网屋盖的基础理论和应用研究——结构的找形和风致响应问题进行了研究，主要的研究成果可以概括如下：

- 预应力直线索单元的线性刚度矩阵和初应力刚度矩阵是结构计算中两个非常重要的参数，本文对这两个矩阵进行了严格、系统的推导并进行简化。
- 预应力索网结构的找形是结构设计中非常重要的一个环节，本文采用几何非线性理论对该种结构的找形进行了研究。
- 预应力索网结构的风致响应分析在结构设计中也非常重要，本文采用了三种计算方案对结构的非线性风致响应时程计算进行了系统的研究，为大跨度屋盖脉动风等效静力风荷载的研究奠定基础。在风致响应计算中，计算方案一是一种精确的计算方法，而计算方案二、三是一种近似方法，在一定程度上可以用计算方案二、三用来近似计算结构的非线性风致响应，不过对结构进行风致响应计算时宜采用方案二考虑平均风荷载引起的非线性，尤其是在初始预拉力较小和基本风压较大的时候。
- 结构对风荷载比较敏感，其非线性响应是一个比较复杂的、需要考虑多频率的宽带过程。刚度较大时，结构体现出较弱的几何非线性特征，但是当刚度较小时，结构便体现出较强的几何非线性。此外，初始预拉力和基本风压对结构变形的影响较索断面面积和分布荷载对结构变形的影响大，因而在进行结构的抗风设计时，初始预拉力和基本风压是主要控制参数。

### 6.1.3 大跨度屋盖脉动风等效静力风荷载的研究

大跨屋盖的等效静力风荷载是现有抗风理论的热点问题之一。当进行结构的风致响应计算时，可以把风荷载分成平均分量和脉动分量，并分别考虑非线性和线性风致响应。在求平均分量和脉动分量的等效静力风荷载时，平均风荷载可以直接作为静力风荷载的一部分，而脉动风荷载具有随机特性，其静力等效风荷载需要研究。本文在脉动风荷载线性风致响应的基础上仅仅对复杂大跨屋盖脉动风荷载的 ESWL 进行了研究，采用了惯性力组合法和与结构振动模态无关而仅与风场 CPT 模态有关的方法，并进行了对比研究，主要完成了如下工作：

- 解决了大跨度屋盖多荷载分布、多等效目标响应的问题。
- 解决了如何进行模态补偿的问题，以便更加准确地求解脉动风荷载的 ESWL。
- 从两种不同的方法解决了结构参振模态选取的困难。
- 如果需要对一些控制元素加以重点关注，本文从数学出发解决了如果在

大跨度屋盖中需要考虑控制元素影响时，如何求解ESWL的问题及其相关注意事项。

实例分析表明，对于非常复杂的大跨度屋盖，采用与结构振动模态无关而仅与风场CPT模态有关且考虑CPT模态补偿的ESWL求解方法物理含义明确、方法简单、适用性更强。CPT模态补偿方法是一种比较通用的方法，它不仅适用于求解复杂大跨度屋盖的ESWL，而且对于其它形式的复杂结构的ESWL，也同样可以采用该方法来进行计算。

## 6.2 研究工作展望

大跨度屋盖是非常重要的建筑结构形式之一，在人们的日常生活中扮演着越来越重要的角色。本文主要以大跨预应力索网屋盖为例对大跨度屋盖的几何非线性进行了研究。同时本文在求大跨度屋盖的ESWL时，在脉动风荷载线性风致响应的基础上也仅对大跨屋盖脉动风荷载的ESWL进行了研究。因而这两个主要课题的精细化研究依然任重道远，尚有许多有待进一步深入的研究工作，这里择其要者简述如下：

- 从物理上来讲，悬索体系的非线性主要来源于几何非线性、流固耦合效应产生的气动非线性，在结构的风致响应计算时需要进一步研究它们之间的共同作用。
- 静力等效风荷载对位移等效可以没有误差，但是对轴力等效依然存在一定误差，如何减小轴力等效引起的误差，需要进一步考虑。
- 计算不同初始等效目标响应时，没有考虑不同响应之间的相关性，需要考虑相关性的影响。
- 本文的脉动风静力等效风荷载依然基于脉动风荷载风致线性响应，如果结构在脉动风荷载下依然表现出较强的非线性，此时的脉动风静力等效风荷载还是需要考虑几何非线性的影响。

## 致谢

记得朱自清先生说过：“洗手的时候，日子从水盆里过去；吃饭的时候，日子从饭碗里过去；默默时，便从凝然的双眼前过去”。弹指一挥间，六载有余的春风秋雨和两千多个日往月来已经烟消云散。捧着这本倾注了心血汗水和付出了智慧情感的沉甸甸的学位论文，心中不禁暖流涌动，激情澎湃，百感交集，思索万千。

六年前一个硕果累累的秋天，为了心中一个崇高的理想，我终于如愿以偿地来到魂牵梦绕的同济园。百年名校那俊秀、伟岸、馨香、恬静、流动但不张扬的个性总是如约而至般浮现在我的眼前，浸淫了我的心间，时时刻刻催我奋进、促我前行，在我的人生画卷上书写了浓墨重彩的一笔。在即将告别母校之际，心中难以遏制的感激之情，如清泉一样汨汨流淌，在心底汇成了一片记忆的海洋。

教诲如春风，师恩似海深。负笈求学同济期间，庆幸遇到了顾明教授、周晖毅副教授两位导师，其为人品格可谓学界翘楚。他们孜孜以求、乐此不疲的精神触动着我；他们宅心仁厚、不慕荣利的胸怀激励着我；他们博学多闻、仍不懈怠的态度感染着我；他们严谨细致、一丝不苟的作风启迪着我；他们诲人不倦、乐于奉献的风范教育着我。正是他们这些卓尔不群的风范使我在做研究的过程中不敢有丝毫的马虎和造次，唯有严肃、严谨、严格和严密，力争精益求精、超逸脱俗和学识出众，才能对得起二位恩师的殚精竭虑和良苦用心。同样感谢的还有课题组的黄鹏、全涌两位副教授，他们对我也总是循循善诱，谆谆教诲，期以进步，他们的高风亮节依然时时刻刻震撼着我。

从脚步踏进小风洞的那天起，小风洞就成了我心灵休憩的港湾。大家精诚团结、互助互爱、肝胆相照、荣辱与共，这样的融洽氛围让人醉心而忘乎所以、深爱而欲舍不能。衷心感谢为营造这种氛围的各位师兄、师姐、师弟和师妹，他们的关心与帮助伴随着我的整个求学生涯，为避免挂一漏万，故不一一穷举。仅在此特别感谢唐意、张建国、陆海峰、潘钧俊、马文勇、黄友钦、樊友川、赵明伟、郑德乾、李雪峰、韩志惠等师兄、师弟、师妹和胡亮、李方慧、张爱社博士后，每每在课题上遇到困难而一筹莫展之际，他们总能鼎力相助，让人“如沐春风、拨云见日”。

众流合注，霏为大川；群山出材，巍成广厦。可以说，我的每一次进步，都离不开我的同事。当我延席授教于中国地质大学(武汉)时，诸多同事对我关怀备至、帮助入微，让我攻坚克难而无后顾之忧，让我潜心治学而无杂念之扰。在此特别感谢唐辉明、陈建平教授，徐善初、董道军、钱同辉和王晓梅副教授在我读博期间对于我工作上的真诚帮助和无私支持，拳拳盛意，感莫可言。

家和万事兴，已过而立的我，有着一个和气致祥的好家庭。本该颐养天年的父母和岳父母，依然为我操心不已，“谁言寸草心，报得三春晖”，养育之恩，无以回报，唯祝他们永远健康快乐！感谢我的两个姐姐，在我的漫漫成长过程中，总伴随着她们情深意长的嘘寒问暖，总萦绕着她们无穷无尽的牵肠挂肚，但愿她们幸福美满到永久！同样感谢的还有我的爱人陶红女士，“军功章里，有你的一半，也有我的一半”这便是她劳苦功高的真实写照，在已经过去的几年之间，她始终和我琴瑟和谐、笙磬同音，奏出人生华丽的乐章。最后还要感谢我的小儿孙

天健，在我躬耕教坛、泛舟学海的苦涩生活中，他总能给我带来无穷的乐趣，让我忘却很多的烦恼，他是我快马加鞭、奋力前行的巨大动力。

滴水之恩，当涌泉相报。但是书不尽言，言不尽意，唯有常怀感恩之心，仁爱他人，智慧天下，才是最好的报答。幸好前途似海，来日方长。路漫漫其修远兮，吾将上下而求索！



2011年11月

## 参考文献

- [1] R.Bradshaw, D.Campbell, M.Gargari, A.Mirmiran,P.Tripeny. Special Structures:Past,Present,and Future[J]. Journal of Structural Engineering, 2002, 128(6):691-709.
- [2] J.D.Holmes. Wind Loading of Structures(Second Edition)[M]. London:Taylor and Francis Group, 2007.
- [3] Y.Uematsu, K.Watanabe, A.Sasaki, M.Yamada,T.Hongo. Wind-Induced Dynamic Response and Resultant Load Estimation of a Circular Flat Roof[J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 1999, 83(1-3):251-261.
- [4] H.Yasui, H.Marukawa, J.Katagiri, A.Katsumura, Y.Tamura,K.Watanabe. Study of Wind-Induced Response of Long-Span Structure[J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 1999, 83(1-3):277-288
- [5] A.G.Davenport,D.Surry. Turbulent Wind Forces on a Large Span Roof and Their Representation by Equivalent Static Loads[J]. Canadian Journal of Civil Engineering, 1984, 11 (4):955-966.
- [6] M.Nakayama, Y.Sasaki, K.Masuda,T.Ogawa. An Efficient Method for Selection of Vibration Modes Contributory to Wind Response on Dome-Like Roofs[J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 1998, 73(1):31-43.
- [7] Y.Uematsu, M.Yamada,A.Sasaki. Wind-Induced Dynamic Response and Resultant Load Estimation for a Flat Long-Span Roof[J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 1996, 65(1-3):155-166.
- [8] P.Christiano, G.R.Seeley,H.Stefan. Transient Wind Loads on Circular Concave Cable Roofs[J]. Journal of the Structural Division,ASCE, 1974, 100(ST11):2323-2341.
- [9] W.J.Lou, F.Lu,B.N.Sun. Study on Buffeting Response for Flexible Roof Structures[A]. Advances in Structural Dynamics[C], Oxford,UK, 2000.
- [10] O.Nakamura, Y.Tamura, K.Miyashita,M.Itoh. A Case Study of Wind Pressure and Wind-Induced Vibration of a Large Span Open-Type Roof[J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 1994, 52(2):237-248.
- [11] Y.L.He,S.L.Dong. New Wind-Induced Responses Analysismethod of Spatial Structures in Frequency Domain with Mode Compensation[J]. Journal of Shanghai Jiao Tong University, 2002, 7(1):89-94.
- [12] G.Solari,L.Carassale. Modal Transformation Tools in Structural Dynamics and Wind Engineering[J]. Wind and Structures, 2000, 3(4):221-241.
- [13] L.Carassale, G.Piccardo,G.Solari. Double Modal Transformation and Wind Engineering Applications[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2001, 127(5):432-439.
- [14] B.Chen, Y.Wu,S.Z.Shen. A New Method for Wind-Induced Response Analysis of Long Span Roofs[J]. International Journal of Space Structures, 2006, 21(2):93-101.
- [15] M.Gu,X.Y.Zhou. An Approximation Method for Resonant Response with Coupling Modes of Structures under Wind Action[J]. Journal of Wind Engineering and Industrial

- Aerodynamics, 2009, 97(11-12):573-580.
- [16] 王国砚, 黄本才, 林颖儒, 徐晓明. 基于 cqc 方法的大跨屋盖结构随机风振响应计算[J]. 空间结构, 2003, 9(4):22-26.
- [17] X.Y.Zhou, M.Gu. An Approximation Method for Computing the Dynamic Responses and Equivalent Static Wind Loads of Large-Span Roof Structures[J]. International Journal of Structural Stability and Dynamics, 2010, 10(5):1141-1165.
- [18] Y.Wu, J.S.Zhang, B.Chen, S.Z.Shen. Identification of the Dominant Vibration Modes of Single-Layer Reticulated Shells under Wind Action[J]. International Journal of Space Structures, 2007, 22(2):123-132.
- [19] X.Z.Chen, A.Kareem. On the Application of Stochastic Decomposition in the Analysis of Wind Effects[A]. proceeding International Conference on Advances in Structure Dynamics[C], The Hong Kong Polytechnic University, Hong Kong, 2000.
- [20] X.Z.Chen, A.Kareem. Proper Orthogonal Decomposition-Based Modeling, Analysis, and Simulation of Dynamic Wind Load Effects on Structures[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2005, 131(4):325-339.
- [21] G.Solari, L.Carassale, F.Tubino. Pod Methods and Applications in Wind Engineering[A]. the 6th Asia-Pacific Symposium on Wind Engineering[C], Seoul, Korea, 2005.
- [22] G.Bartoli, C.Borri, F.Mirto, G.Solari. Some Recent Advances and Developments in Wind Dynamics of Large Lightweight Engineering Facilities[A]. Lightweight Structures in Civil Engineering Proceedings of the International Symposium[C], Warsaw, Poland, 2002.
- [23] L.Carassale, G.Solari. Wind Modes for Structural Dynamics: A Continuous Approach[J]. Probabilistic engineering mechanics, 2002, 17(2):157-166.
- [24] 唐意, 金新阳. 基于 pod 方法的大跨空间结构风效应研究[A]. 第十四届全国结构风工程学术会议[C], 北京, 2009.
- [25] 林家浩, 张亚辉. 随机振动的虚拟激励法[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
- [26] J.H.Lin. A Fast Cqc Algorithm of Psd Matrices for Random Seismic Responses[J]. Computers and Structures, 1992, 44(3):683-687.
- [27] J.H.Lin, W.S.Zhang, F.W.Williams. Pseudo-Excitation Algorithm for Nonstationary Random Seismic Responses[J]. Engineering Structures, 1994, 16(4):270-276.
- [28] S.D.Xue, X.S.Wang, Z.Cao. Multi-Dimensional Pseudo Excitation Method for Nonstationary Random Seismic Analysis of Spatial Lattice Shells[J]. International Journal of Space Structures, 2004, 19(3):129-136.
- [29] Y.L.Xu, W.S.Zhang, J.M.Ko, J.H.Lin. Pseudo-Excitation Method for Vibration Analysis of Wind-Excited Structures[J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 1999, 83(1):443-454.
- [30] D.K.Sun, Y.L.Xu, J.M.Ko, J.H.Lin. Fully Coupled Buffeting Analysis of Long-Span Cable-Supported Bridges: Formulation[J]. Journal of Sound and Vibration, 1999, 228(3):569-588.
- [31] Y.L.Xu, D.K.Sun, J.M.Ko, J.H.Lin. Buffeting Analysis of Long Span Bridges: A New Algorithm[J]. Computers & Structures, 1998, 68(4):303-313.
- [32] 陈贤川. 大跨度屋盖结构风致响应和等效风荷载的理论研究及应用[D]. 杭州: 浙江大学, 2005.
- [33] 潘钧俊. 张拉膜结构风致非线性响应分析的等效线性化方法[D]. 上海: 同济大学,



- 2009.
- [34] 朱位秋. 随机振动[M]. 北京:科学出版社, 1998.
- [35] M.Lazzari, A.V.Saetta,R.V.Vitaliani. Non-Linear Dynamic Analysis of Cable-Suspended Structures Subjected to Wind Actions[J]. Computers and Structures, 2001, 79(9):953-969.
- [36] G.D.Stefanou. Dynamic Response of Tension Cable Structures Due to Wind Loads[J]. Computers and Structures, 1992, 43(2):365-372.
- [37] D.Y.Tan, Q.S.Yang,C.Zhao. Discrete Analysis Method for Random Vibration of Structures Subjected to Spatially Correlated filtered White Noises[J]. Computers and Structures, 1992, 43(6):1051-1056.
- [38] 杨庆山. 悬索体系随机风振响应分析及抗风设计[D]. 哈尔滨:哈尔滨建筑大学, 1995.
- [39] D.Y.Tan. Discrete Analysis Method for Random[J]. Computers and Structures, 1993, 49(3):523-530.
- [40] S.Z.Shen,Q.S.Yang. Wind-Induced Response Analysis and Wind-Resistant Design of Hyperbolic Paraboloid Cable Net Structures[J]. International Journal of space structures, 1999, 14(1):57-65.
- [41] Y.L.He, X.Ma,Z.M.Wang. Nonlinear Discrete Analysis Method for Random Vibration of Guyed Masts under Wind Load[J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 2003, 91(4):513-525.
- [42] R.D.Cook, D.S.Malkus, M.E.Plesha,R.J.Witt. Concepts and Applications of Finite Element Analysis(4th Edition) [M]. John Wiley & Sons Inc, 2000.
- [43] K.J.Bathe,E.L.Wilson. Numerical Methods in Finite Element Analysis[M]. New Jersey,USA:Prentice-Hall,Inc., 1976.
- [44] N.M.Newmark. A Method of Computation for Structural Dynamics[J]. Journal of Engineering Mechanics Division, 1959, 85(EM3):67-94.
- [45] W.C.Knudson. Recent Advances in the Field of Long Span Tension Structures[J]. Engineering Structures, 1991, 13(2):164-177.
- [46] Y.Uematsu, T.Sone, M.Yamada,T.Hongo. Wind-Induced Dynamic Response and Its Load Estimation for Structural Frames of Single-Layer Latticed Domes with Long Spans[J]. Wind and Structures, 2002, 5(6):543-562.
- [47] Y.Q.Li,Y.Tamura. Nonlinear Dynamic Analysis for Large-Span Single-Layer Reticulated Shells Subjected to Wind Loading[J]. Wind and Structures, 2005, 8(1):35-48.
- [48] Y.Q.Li,Y.Tamura. Wind-Resistant Analysis for Large-Span Single-Layer Reticulated Shells[J]. International Journal of Space Structures, 2004, 19(1):47-59.
- [49] B.Tabarrokt,Z. Qin. Dynamic Analysis of Tension Structures[J]. Computers and Structures, 1997, 62(3):467-474.
- [50] S.A.G.Oskoei,G.McClure. Dynamic Analysis of Cable Roofs under Transient Wind:A Comparison between Time Domain and Frequency Domain Approaches[J]. Tsinghua Science and Technology, 2008, 13(S1):53-57.
- [51] B.Tabarrok,Z.Qin. Nonlinear Analysis of Tension Structures[J]. Computers and Structures, 1992, 45(5/6):973-984.
- [52] H.A.Buchholdt. An Introduction to Cable Roof Structures(Second Edition ) [M]. London,UK:Thomas Telford, 1999.
- [53] W.R.Clough,J.Penzien. Dynamics of Structures(Second Edition)[M]. California:Computers

- and Structures,Inc., 1995.
- [54] J.D.Holmes. Along Wind Response of Lattice Towers-Iii. Effective Load Distributions[J]. *Engineering Structures*, 1996, 18(7):489-494.
- [55] G.Solari. The Role of Analytical Methods for Evaluating the Wind-Induced Response of Structures[J]. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 2002, 90(12-15):1453-1477.
- [56] Y.Zhou, A.Kareem,M.Gu. Gust Loading Factors for Design Applications[A]. *Proceedings of the 10th International Conference on Wind Engineering[C]*, Copenhagen,Denmark, 1999.
- [57] A.G.Davenport. Gust Loading Factor[J]. *Journal of structural division*, 1967, 93(ST3):11-34.
- [58] X.Z.Chen,A.Kareem. Equivalent Static Wind Loads on Buildings:New Model[J]. *Journal of Structural Engineering*, 2004, 130(10):1425-1435.
- [59] A.Kareem,Y.Zhou. Gust Loading Factor-Past,Present and Future[J]. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 2003, 91(12-15):1301-1328.
- [60] G.Piccardo,G.Solari. 3d Wind-Excited Response of Slender Structures: Closed-Form Solution[J]. *Journal of Structural Engineering*, 2000, 126(8):936-943.
- [61] X.T.Zhang. The Current Chinese Code on Wind Loading and Comparative Study of Wind Loading Codes[J]. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 1988, 30(1-3):133-142.
- [62] Load Code for the Design of Building Structures(Gb 50009-2001)[S]. BeiJing:China Architecture & Building Press, 2002.
- [63] X.Z.Chen,A.Kareem. Equivalent Static Load Distribution of Coupled Buffeting Response of Bridges[A]. *Proceeding of the 8th ASCE Specialty Conference on Probabilistic Mechanics and Structural Reliability[C]*, Notre Dame, Indiana, 2000.
- [64] G.Solari. A Generalized Definition of Gust Factor[J]. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 1990, 36(1-3):539-548.
- [65] M.P.Repetto,G.Solari. Equivalent Static Wind Actions on Vertical Structures[J]. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 2004, 92(5):335-357.
- [66] Y.Uematsu, M.Yamada,A.Karasu. Design Wind Loads for Structural Frames of Flat Long-Span Roofs: Gust Loading Factor for a Structurally Integrated Type[J]. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 1997, 66(2):155-168.
- [67] Y.Uematsu, M.Yamada,A.Karasu. Design Wind Loads for Structural Frames of Flat Long-Span Roofs: Gust Loading Factor for the Beams Supporting Roofs[J]. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 1997, 66(1):35-50.
- [68] Y.Uematsu,M.Yamada. Wind-Induced Dynamic Response and Its Load Estimation for Structural Frames of Circular Flat Roofs with Long Spans[J]. *Wind and Structures*, 2002, 5(1):49-60.
- [69] H.Marukawa, Y.Uematsu, Y.Tamura, O.Nakamura,H.Ueda. Design Wind Load on Flat Long-Span Roofs[A]. *Proceedings of the 4th East Asia-Pacific Conference on Structural Engineering and Construction[C]*, Seoul,Korea, 1993.
- [70] B.Chen, Y.Wu,S.Z.Shen. Equivalent Static Wind Loads on Large Span Roofs[A]. *Proceedings of IASS-APCS Symposium [C]*, Beijing,China, 2006.
- [71] M.Kasperski. Extreme Wind Load Distributions for Linear and Nonlinear Design[J].

- Engineering Structures, 1992, 14(1):27-34.
- [72] M.Kasperski,H.-J.Niemann. The L.R.C. (Load-Response-Correlation) - Method a General Method of Estimating Unfavourable Wind Load Distributions for Linear and Non-Linear Structural Behaviour[J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 1992, 43(3):1753-1763.
- [73] M.Suzuki, S.Sanada, Y.Hayami,S.Ban. Prediction of Wind-Induced Response of a Semi-Rigid Hanging Roof[J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 1997, 72(1-3):357-366.
- [74] Y.Uematsu, O.Kuribara, M.Yamada, A.Sasaki,T.Hongo. Wind-Induced Dynamic Behavior and Its Load Estimation of a Single-Layer Latticed Dome with a Long Span[J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 2001, 89(14):1671-1687.
- [75] J.D.Holmes. Effective Static Load Distributions in Wind Engineering[J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 2002, 90(2):91-109.
- [76] Y.Zhou, A.Kareem,M.Gu. Equivalent Static Buffeting Loads on Structures[J]. Journal of Structural Engineering, 2000, 126(8):989-992.
- [77] E.C.C.Choi,F.A.Hidayat. Dynamic Response of Structures to Thunderstorm Winds[J]. Progress in Structural Engineering and Materials, 2002, 4(4):408-416.
- [78] Y.Q.Li,Y.Tamura. Equivalent Static Wind Load Estimation in Wind-Resistant Design of Single-Layer Reticulated Shells[J]. Wind and Structures, 2005, 8(6):443-454.
- [79] Y.Q.Li, Y.Tamura, A.Yoshida, A.Katsumura,K.Cho. Wind Loading and Its Effects on Single-Layer Reticulated Cylindrical Shells[J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 2006, 94(12):949-973.
- [80] M.Kasperski. Design Wind Loads for Low-Rise Buildings: A Critical Review of Wind Load Specifications for Industrial Buildings[J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 1996, 61(2-3):169-179.
- [81] Y.Tamura, H.Kikuchi,K.Hibi. Actual Extreme Pressure Distributions and Lrc Formula[J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 2002, 90(1959-1971).
- [82] J.D.Ginger, G.F.Reardon,B.J.Whitbread. Wind Load Effects and Equivalent Pressures on Low-Rise House Roofs[J]. Engineering Structures, 2000, 22(6):638-646.
- [83] J.Y.Fu, Z.N.Xie,Q.S.Li. Equivalent Static Wind Loads on Long-Span Roof Structures[J]. Journal of Structural Engineering, 2008, 134(7):1115-1128.
- [84] A.Katsumura, Y.Tamura,O.Nakamura. Universal Wind Load Distribution Simultaneously Reproducing Largest Load Effects in All Subject Members on Large-Span Cantilevered Roof[J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 2007, 95(9-11):1145-1165.
- [85] A.Katsumura, Y.Tamura,O.Nakamura. Maximum Wind Load Effects on a Large-Span Cantilevered Roof[J]. Structural Engineering International, 2005, 15(4):142-145.
- [86] J.Armitt. Eigenvector Analysis of Pressure Fluctuations on the West Burton Instrumented Cooling Tower[R]. Central Electricity Research Laboratories, 1968.
- [87] B.Bienkiewicz, H.J.Ham,Y.Sun. Proper Orthogonal Decomposition of Roof Pressure[J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 1993, 50(193-202).
- [88] S.H.Jeong,B.Bienkiewicz. Application of Autoregressive Modeling in Proper Orthogonal Decomposition of Building Wind Pressure[J]. Journal of Wind Engineering and Industrial

- Aerodynamics, 1997, 69-71(685-695).
- [89] B.Bienkiewicz, Y.Tamura, H.J.Ham, H.Ueda,K.Hibi. Proper Orthogonal Decomposition and Reconstruction of Multi-Channel Roof Pressure[J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 1995, 54(55):369-381
- [90] H.Kikuchi, Y.Tamura, H.Ueda,K.Hibi. Dynamic Wind Pressures Acting on a Tall Building Model-Proper Orthogonal Decomposition[J]. Journal of wind engineering and industrial aerodynamics, 1997, 69-71(631-646).
- [91] J.D.Holmes, R.Sankaran, K.C.S.Kwok,M.J.Syme. Eigenvector Modes of Fluctuating Pressures on Low-Rise Building Models[J]. Journal of wind engineering and industrial aerodynamics, 1997, 69-71(697-707).
- [92] Y.Uematsu, M.Yamada, A.Inoue,T.Hongo. Wind Loads and Wind-Induced Dynamic Behavior of a Single-Layer Latticed Dome[J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 1997, 66(3):227-248.
- [93] Y.Tamura, H.Ueda, H.Kikuchi, K.Hibi, S.Suganuma,B.Bienkiewicz. Proper Orthogonal Decomposition Study of Approach Wind-Building Pressure Correlation[J]. Journal of wind engineering and industrial aerodynamics, 1997, 72(1-3):421-431.
- [94] S.H.Jeong, B.Bienkiewicz,H.J.Ham. Proper Orthogonal Decomposition of Building Wind Pressure Specified at Non-Uniformly Distributed Pressure Taps[J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 2000, 87(1):1-14.
- [95] S.Kho, C.Baker,R.Hoxey. Pod/Arma Reconstruction of the Surface Pressure Field around a Low Rise Structure[J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 2002, 90(1831-1842).
- [96] J.Dunyak, X.Gilliam, D.Smith,F.Q.Wu. Proper Orthogonal Decomposition Modeling for Full-Scale Pressure Fields [A]. Proceedings of the 14th Engineering Mechanics Conference[C], Austin,Texas,USA, 2000.
- [97] X.Gilliam, J.P.Dunyak, D.A.Smith,F.Wu. Using Projection Pursuit and Proper Orthogonal Decomposition to Identify Independent Flow Mechanisms[J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 2004, 92(1):53-69.
- [98] A.G.Davenport. How Can We Simplify and Generalize Wind Load?[J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 1995, 54-55(657-669).
- [99] E.T.d.Grenet,F.Ricciardelli. Spectral Proper Transformation of Wind Pressure fluctuations: Application to a Square Cylinder and a Bridge Deck[J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 2004, 92(14-15):1281-1297.
- [100] F.Tubino,G.Solari. Double Proper Orthogonal Decomposition for Representing and Simulating Turbulence Fields[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2005, 131(12):1302-1312.
- [101] A.Kareem,J.E.Cermak. Pressure Fluctuations on a Square Building Model in Boundary-Layer Flows[J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 1984, 16(17-41).
- [102] M.M.Rocha, S.V.S.Cabral,J. D. Riera. A Comparison of Proper Orthogonal Decomposition and Monte Carlo Simulation of Wind Pressure Data[J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 2000, 84(3):329-344.
- [103] F.Ricciardelli, E. T. d. Grenet,G.Solari. Analysis of the Wind Loading of a Bridge Deck Box

- Section Using Proper Orthogonal Decomposition[J]. *International Journal of Fluid Mechanics Research*, 2002, 29(3&4):312-322.
- [104] T.Bui-Thanh,M.Damodaran. Proper Orthogonal Decomposition Extensions for Parametric Applications in Transonic Aerodynamics[A]. 21th AIAA Applied Aerodynamics Conference[C], Orlando,Florida, 2003.
- [105] Y.Z.Chen, A.G.Kopp,D.Surry. Spatial Extrapolation of Pressure Time Series on Low Buildings Using Proper Orthogonal Decomposition[J]. *Wind and Structures*, 2004, 7(6):373-392.
- [106] Z.H.Ni, F.H.Li,Z.N.Xie. Application of Pod to Prediction of Wind Pressure Fields on Roofs[A]. *Proceedings of The Sixth Asia-Pacific Conference on Wind Engineering[C]*, Seoul,Korea, 2005.
- [107] D.J.Han,J.Li. Application of Proper Orthogonal Decomposition Method in Wind Field Simulation for Roof Structures[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2009, 135(8):786-795.
- [108] L.T.Hoa,N.D.Anh. Spectral Proper Transformation and Application to Gust Response Prediction of Structures[J]. *Vietnam Journal of Mechanics*, 2007, 29(1):25-36.
- [109] L.Carassale,G.Solari. Proper Orthogonal Decomposition of Multi-Variate Loading Processes[A]. 8th ASCE Specialty Conference on Probabilistic Mechanics and Structural Reliability[C], University of Notre Dame,USA, 2000.
- [110] Y.S.Li,A.Kareem. Stochastic Decomposition and Application to Probabilistic Dynamics[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1995, 121(1):162-174.
- [111] J.D.Holmes. Optimised Peak Load Distributions[J]. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 1992, 41(1):267-276.
- [112] S.Gordeyev. Pod,Lse and Wavelet Decomposition:Literature Review[OL]. 2000.
- [113] M.P.Straw. Computation and Measurement of Wind Induced Ventilation[D]. Nottingham,England:the University of Nottingham, 2000.
- [114] Y.Tamura, S.Suganuma, H.Kikuchi,K.Hibi. Proper Orthogonal Decomposition of Random Wind Pressure Field[J]. *Journal of Fluids and Structures*, 1999, 13(78):1069-1095.
- [115] P.Hemon,F.Santi. Applications of Biorthogonal Decompositions in Fluid-Structure Interactions[J]. *Journal of Fluids and Structures*, 2003, 17(8):1123-1143.
- [116] B.F.Feeny. On Proper Orthogonal Coordinates as Indicators of Modal Activity[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2002, 255(5):805-817.
- [117] M.D.Graham,I.G.Kevrekidis. Alternative Approaches to the Karhunen-Loève Decomposition for Model Reduction and Data Analysis[J]. *Computers and Chemical Engineering*, 1996, 20(5):495-506.
- [118] D.Ruan, H.He, D.A.Castañón,K.C.Mehta. Normalized Proper Orthogonal Decomposition (Npod) for Building Pressure Data Compression[J]. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 2006, 94(6):447-461.
- [119] K.E.Willcox. Reduced-Order Aerodynamic Models for Aeroelastic Control of Turbomachines[D]. Massachusetts,USA:Massachusetts Institute of Technology, 2000.
- [120] P.Astrid, L.Huisman, S.Weiland,A.C.P.M.Backx. Reduction and Predictive Control Design for a Computational Fluid Dynamics Model[A]. In *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control[C]*, Las Vegas,USA, 2002.

- [121] Y.H.Cao, J.Zhu, Z.D.Luo,I.M.Navon. Reduced-Order Modeling of the Upper Tropical Pacific Ocean Model Using Proper Orthogonal Decomposition[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2006, 52(8-9):1373-1386.
- [122] W.Z.Lin, K.H.Lee, P.Lu, S.P.Lim,Y.C.Liang. The Relationship between Eigenfunctions of Karhunen-Lo Ve Decomposition and the Modes of Distributed Parameter Vibration System[J]. Journal of Sound and Vibration, 2002, 256(4):791-799.
- [123] K.Saranyasontorn,L.Manuel. Low-Dimensional Representations of Inflow Turbulence and Wind Turbine Response Using Proper Orthogonal Decomposition[J]. Journal of Solar Energy Engineering, 2005, 127(4):553-562.
- [124] R.Everson,L.Sirovich. Karhunen-Loeve Procedure for Gappy Data[J]. Journal of the Optical Society of America A: Optics, Image Science, and Vision, 1995, 12(8):1657-1664.
- [125] L.Carassale. Pod-Based filters for the Representation of Random Loads on Structures[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2005, 20(3):263-280.
- [126] G.Solari,F.Tubino. A Turbulence Model Based on Principal Components[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2002, 17(4):327-335.
- [127] M.Loeve. Probability Theory Ii (Graduate Texts in Mathematics)[M]. New York:Springer-Verlag, 1994.
- [128] A.Papoulis. Probability, Random Variables, and Stochastic Processes(Third Edition)[M]. New York:McGraw-Hill, 1991.
- [129] P.A.LeGresley. Application of Proper Orthogonal Decomposition (Pod) to Design Decomposition Methods[D]. California,USA:Stanford University, 2005.
- [130] P.E.Gill, W.Murray,M.H.Wright. Practical Optimization[M]. London:Academic Press, 1981.
- [131] C.J.Baker. Aspects of the Use of Proper Orthogonal Decomposition of Surface Pressure Fields[J]. Wind and Structures, 2000, 3(2):97-115.
- [132] W.T.Thomson,M.D.Dahleh. Theory of Vibration with Applications (5th Edition)[M]. New Jersey,USA:Prentice Hall,Inc., 1997.
- [133] P.Astrid. Reduction of Process Simulation Models:A Proper Orthogonal Decomposition Approach[D]. Eindhoven:Technische Universiteit Eindhoven, 2004.
- [134] P.Holmes, J.L.Lumley,G.Berkooz. Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry[M]. Cambridge:Cambridge University Press, 1996.
- [135] 叶孟洋. 大跨度干燥棚结构风载风洞试验研究[D]. 上海:同济大学, 2006.
- [136] C.J.Baker. Aspects of the Use of the Technique of Orthogonal Decomposition of Surface Pressure Fields[A]. Proceedings of the 10th International Conference on Wind Engineering[C], Copenhagen, 1999.
- [137] G.Tibert. Numerical Analyses of Cable Roof Structures[D]. Stockholm,Sweden:Royal Institute of Technology, 1999.
- [138] 沈世钊, 徐崇宝, 赵臣,武岳. 悬索结构设计(第二版)[M]. 北京:中国建筑工业出版社, 2006.
- [139] G.D.Stefanou. Dynamic Response Analysis of Nonlinear Structures Using Step-by-Step Integration Techniques[J]. Computers and Structures, 1995, 57(6):1063-1070.
- [140] G.Regá. Nonlinear Vibrations of Suspended Cables—Part I:Modeling and Analysis[J]. Applied Mechanics Reviews, 2004, 57(6):443-478.

- [141] A.S.K.Kwan. A Simple Technique for Calculating Natural Frequencies of Geometrically Nonlinear Prestressed Cable Structures[J]. Computers and Structures, 2000, 74(1):41-50.
- [142] P.Krishna. Cable-Suspended Roofs[M]. New York:McGraw-Hill Book Company, 1978.
- [143] 杨庆山,姜忆南. 张拉索—膜结构分析与设计[M]. 北京:科学出版社, 2004.
- [144] K.J.Bathe. Finite Element Procedures[M]. New Jersey,USA:Prentice-Hall,Inc, 1996.
- [145] 朱慈勉,吴宇清. 计算结构力学[M]. 北京:科学出版社, 2009.
- [146] K.J.Bathe. Finite Elment Procedures in Engineering Analysis[M]. Englewood cliffs,New Jersey,USA:Prentice-Hall,Inc., 1982.
- [147] 殷有泉. 非线性有限元基础[M]. 北京:北京大学出版社, 2007.
- [148] O.C.Zienkiewicz,R.L.Taylor. Finite Element Method (5th Edition):Volume 2-Solid Mechanics[M]. Elsevier, 2000.
- [149] C.A.Felippa. Nonlinear Finite Element Methods[R]. Department of Aerospace Engineering Sciences and Center for Space Structures and controls,University of Colorado at Boulder,USA, 2001.
- [150] T.Belytschko, W.K.Liu,B.Moran. Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures[M]. London:John Weiley and Sons Ltd 2000.
- [151] M.A.Crisfield. Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures,Vol.1:Essential [M]. Chichester,UK:John Wiley & Sons, 1991.
- [152] S.P.Timoshenko,J.N.Goodier. Theory of Elasticity(Third Edition)[M]. New York:McGraw-Hill Book Companies, 1970.
- [153] W.J.Lewis. Tension Structures Form and Behaviour[M]. Heron Quay,London:Thomas Telford, 2003.
- [154] O.C.Zienkiewicz,R.L.Taylor. Finite Element Method (5th Edition):Volume 1-the Basis[M]. Elsevier, 2000.
- [155] 王勖成. 有限单元法[M]. 北京:清华大学出版社, 2003.
- [156] Y.T.Yang. Nonlinear Static and Dynamic Analysis of a Suspended Cable[D]. Texas,USA:Texas tech university, 1983.
- [157] D.V.Hutton. Fundamentals of Finite Element Analysis[M]. New York,USA:McGraw-Hill Book Companies, 2004.
- [158] R.R.Craig,Jr. Structural Dynamics: An Introduction to Computer Methods[M]. New York,USA:John Wiley and sons, 1981.
- [159] C.F.Gerald,P.O.Wheatley. Applied Numerical Analysis (7th Edition)[M]. Massachusetts,USA:Addison Wesley, 2003.
- [160] E.Isaacson,H.B.Keller. Analysis of Numerical Methods[M]. New York:Dover Publications,Inc., 1993.
- [161] A.K.Chopra. Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering (2nd Edition)[M]. New Jersey,USA:Prentice Hall, 2000.
- [162] E.L.Wilson. Three-Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures:A Physical Approach with Emphasis on Earthquake Engineering[M]. Berkeley, California, USA:Computers and Structures, Inc., 2002.
- [163] K.Santoso. Wide-Span Cable Structure[D]. Berkeley,USA:University of California, 2003.
- [164] Y.Y.Zhao, L.H.Wang, D.L.Chen,L.Z.Jiang. Non-Linear Dynamic Analysis of the Two-Dimensional Simplified Model of an Elastic Cable[J]. Journal of sound and vibration,

- 2002, 255(1):43-59.
- [165] T.R.Chandrupatla,A.D.Belegundu. Introduction to Finite Elements in Engineering[M]. Prentice-Hall,Inc, 2002.
- [166] B.Tabarrok,Z.Qin. A Finite Element Procedure for Form Finding of Tension Structures[J]. Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering, 1992, 16(3/4):235-250.
- [167] R.B.Haber,J.F.Abel. Initial Equilibrium Solution Methods for Cable Reinforced Membranes Part I—Formulations[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1982, 30(3):263-284.
- [168] K.-U.Bletzinger. Form Finding of Tensile Structures by the Updated Reference Strategy[A]. IASS International Colloquium on Structural Morphology Towards the New Millennium[C], University of Nottingham, 1997.
- [169] J.L.Meek,X.Y.Xia. Computer Shape Finding of Form Structures[J]. International Journal of Space Structures, 1999, 14(1):35-55.
- [170] D.S.Wakefield. Engineering Analysis of Tension Structures: Theory and Practice[J]. Engineering Structures, 1999, 21(8):680-690.
- [171] M.R.Barnes. Form Finding and Analysis of Tension Structures by Dynamic Relaxation[J]. International Journal of Space Structures, 1999, 14(2):89-104.
- [172] 预应力钢结构技术规程(Cecs 212:2006)[S]. 北京:中国计划出版社, 2006.
- [173] 上海市工程建设规范:建筑结构用索应用技术规程(Dg/Tj08-019-2005)[S]. 2005.
- [174] 赵臣. 大跨悬索屋盖结构风激动力性能[D]. 哈尔滨:哈尔滨建筑工程学院, 1991.
- [175] H.Y.Wu. Numerical Evaluation of Equivalent Static Wind Loads of Long-Span Roofs[OL]. 2007.
- [176] G.H.Golub,C. F. V. Loan. Matrix Computation[M]. John Hopkins University Press, 1996.
- [177] 魏木生. 广义最小二乘问题的理论和计算[M]. 北京:科学出版社, 2006.
- [178] C.L.Lawson,R.J.Hanson. Solving Least Squares Problems(Third Edition)[M]. Philadelphia,USA: Soc for Industrial & Applied Math, 1995.



## 个人简历、在读期间发表的学术论文与研究成果

### 个人简历:

孙五一, 男, 1976年5月生, 四川省平昌县人, 中国民主同盟成员。

1995年9月——1999年7月, 武汉城市建设学院建筑工程专业学习, 获工学学士学位。

2002年9月——2004年12月, 武汉理工大学结构工程专业学习, 获工学硕士学位。

2005年9月——至今, 同济大学风工程专业学习。

2000年5月——至今, 在中国地质大学(武汉)工作。

Email: sunwuyi@gmail.com; sunwuyi@foxmail.com。

### 已发表论文:

- 1、顾明、孙五一等. 中国航海博物馆风压分布的模型试验研究. 建筑结构, 2009年, 39卷第1期
- 2、孙五一、周暄毅、顾明. 基于本征模态补偿的大跨屋盖脉动风等效静力风荷载. 工程力学, 2011年, 28卷第4期。
- 3、孙五一、周暄毅、顾明. 基于补偿方法的大跨屋盖脉动风等效静力风荷载. 振动工程学报, 2011年, 24卷第6期。
- 4、周暄毅、顾明、李亚明、周晓峰、孙五一等. 某大型博物馆结构风致响应分析. 振动与冲击, 2008, 27卷第2期